[illegible]



PRINTED & PUBLISHED

at the

JAGAN MITRA PRESS

RUTNAGIRI

1854.



सरळरेषा आणि गोलीय

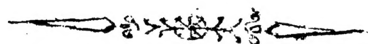
त्रिकोणमिति



इंग्रजी मूळ ग्रंथाचा अ[illegible]ज्ञेनें

महाराष्ट्र भाषेंत

केली.



ती

रत्नागिरी एथील जगन्मित्र छापखान्यांत

छापिली.



सन

१८५४



प्रस्त।

याचा परस्पर जोड फळा

ं,एकमेकींचा साह्या शिवाय

असा त्यांचा संबंध असून

गणित असे दोन दोन भाग

षेंत थोडे बहुत ग्रंथ आहे

गणित भागां विषयीं ग्रंथां

य त्रिकोणमिति हा विष-

थम भाग (पाया) आहे;

वेध करून उंचा का दि-

गोल आणि खगोल सं-

हे, त्याचें वर्णन मी एथें को

मन लाविलें असतां याचा

उपयोग किती आहे, हें सर्वांस कळेल.

आलीकडे हा आमचा हिंदुस्तान देश अज्ञानरूपी निबिड अंधःकारानें व्याप्त झाला; असें परमकृपालु जगत् पिता जो ईश्वर त्यानें पाहून इंग्लिशरूपी मशाल्या देशांत आणिला; तेणें करून कांहीं मशालीजवळील लोक प्रकाशांत आहेत; परंतु थोड्या

अंतरावरून, कांहीं प्रकाश व कांहीं अंधःकार यांतचौच पडे नाहेत, आणिथोड्या अंतरापलिकडले बहुतेक लोक घोरअंधःकारांतच आहेत. पहा सन १८५१ चा पुणें ज्ञान प्रकाश वर्तमान पत्रांत जोशी यासहीचीं एक दोन पत्रें पृथ्वी सूर्याभोंवतीं व आपल्या आंसाभोंवती फिरत नाहीं, अशा मजकुराचीं होतीं. त्यांचें कोणेकानें पृथ्वी सूर्याभोंवतीं [illegible] आसा स भोंवतीं फिरत आहे; असें उत्तर दिल्याव[illegible] . शीबुवा इतके क्रुद्ध झाले कीं, त्यांनीं शेवटीं अपशब्दांपर्यंत मजल आणिली; इतकी त्यांचा अंतःकरणाची पृथ्वी [illegible] नाहीं, अशी खात्री होऊन राहिली होती* व त्याप्रमाणें [illegible] बहुतेक लोकांची समजूत आहे; पूर्वोक्त जोशी बुवांचा पत्राचें उत्तर यथामति द्यावें; असें माझा मनांत आलें होतें. परंतु विचार केला कीं, असा जास बळकट ग्रह झाला आहे; तो माझा शब्दर पत्रांनीं हीं निरसन होणार नाहीं. याजकरितां अशा समजुती निरसनार्थ पृथ्वी फिरत आहे; या आधारानें ग्रहांचे उदयास्ताधिकार ग्रहणें इत्यादि विषयांवर ग्रंथच झाले पाहिजेत, ह्मणजे पृथ्वी गतिमान आहे, या आधारानें झालेल्या ग्रंथांनीं

---

* जास लिहितां वाचितां येतें, व सामान्यतः एतद्देशीय लोक विद्वान ह्मणतात, त्याची अशी स्थिति मग इतर लोकांचें अज्ञान किती असेल, याचें अनुमान सहज होईल.

सूर्य चंद्रादि ग्रहण अचूक अनुभवास येऊं लागलीं, म्हणजे कांहीं अज्ञान कमी होईल; केवळ ग्रहणादिकांचा उपपत्तिपें वर्णन करून उपयोगी नाहीं.

हल्लीं चा बहुतेक एतद्देशीय मोठमोठ्या विद्वानांची गणितावर अभिरुचि कमी आहे, परंतु विशेषें करून या देशांतील लोकांचें अज्ञान निरसनार्थ, ग्रंथ करण्याकडे त्यांचें लक्ष फार आहे. असें असतां एतद्देशीय लोकांत ज्योतिषाविषयीं जसें अज्ञान आहे, तसें दुसरें कोणतेंच नसेल; क्षणभर गणिता विषयीं एकीकडे ठेविलें, तरीं प्रश्न, मुहूर्त, जातक, ताजक इत्यादि फल ग्रंथांनीं तर अनर्थच केला आहे, त्यांनीं रावापासून रंकापर्यंत, आणि महापंडितापासून गुराख्यापर्यंत सर्वांस वेड लाविलें आहे. असें असून या अज्ञान निरसनार्थ ग्रंथांचीं भाषांतरें करण्यास कोणी लेखणीच उचलित नाहीं, याचें कारण इतर ग्रंथांपेक्षां गणिताचें भाषांतर करणें कठीण, किंवा दुसऱ्या मोठमोठ्या दुर्निवार अडचणी आहेत, हें मला कळत नाहीं; परंतु कशाही कारणानें देश भाषेंत ग्रंथ न झाले असतां, आह्मां एतद्देशीय लोकांचेंच अनहित आहे. याजकरितां या प्रसंगीं उगाच हात पाय आटोपून बसणें ठीक नव्हे, असें ह्मणून, जरीं मी विद्वज्जनांचा दासांचा दा

स शोभणार नाहीं, इतकी माझ्या विद्येची न्यूनता असतां ही, वर लिहिलेलें अज्ञान दूरी करणार्थ ग्रंथ करण्या विषयीं मोठ मोठ्या विद्वानांचीं मनें उत्तेजित करण्या करितां, त्यांस मोठ्या विनयतेनें आणि परम प्रितीनें हें लहानसें पुस्तक नजर केलें असे.

या ग्रंथाची वाक्य रचना यथामति केली आहे; तथापि प्रसंगोपात वाक्य रचनेकडे दृष्टि न देतां, जेथें जो शब्द लिहिला असतां, विषय यथास्थित समजेल, तेथें दुसरा पर्याय शब्द न देतां, तोच शब्द लिहिला आहे. याजकरितां कित्येक ठिकाणीं एकच शब्द एका पंक्तींत दोन वेळ ही आला असेल; त्याच प्रमाणें मराठी मध्यें आज पर्यंत जीं गणिताचीं पुस्तकें शिकविण्याचा वहिवाटींत आहेत; त्यांतील कित्येक गणित संबंधी शब्दांपेक्षां जरीं अधिक शुद्ध शब्द आढळतात; ह्मणजे (कोन, याचा ठिकाणीं कोण, कुरलरी, याचा ठिकाणीं कारलेरी, सपूमेंट, याचा ठिकाणीं सप्लीमेंट) इत्यादि लिहिणें अधिक योग्य आहे, तरीं जे आज रुढींत असून, शिकणारांचा तोडीं दृढ बसून गेले आहेत, त्यांत फेरफार केल्या वांचून तसेच लिहिले आहेत.

आतां सर्व लोकांस माझी हात जोडून विनंती आहे कीं,

मी हा लहानसा ग्रंथ केला आहे, यांतील दोषांकडे लक्ष न देतां जो कांहीं अल्प स्वल्प गुण असेल, त्याचें मंडन करावें कारण ह्मटलें आहे,

त्यजंति शूर्पवत् दोषान् गुणान् गृण्हंति साधवः॥
दोषग्राही गुणत्यागी चालनीव च दुर्जनः॥१॥

या ग्रंथांतील गुण दोष केवळ गुराख्याचानें काढवत नाहींत कांहीं तरीं विद्वान पाहिजे, आतां जे विद्वान आहेत त्यांस कोणत्याही कामास प्रथम किती श्रम पडतात, इत्यादि सर्व विचार माहितच असतात. कारण त्यांचा हातून यापेक्षां ही मोठमोठीं कामें होतात; याजकरितां ते दोषांकडे दृष्टि न देतां, जो कांहीं थोडाबहुत गुण असेल, त्याचेंच मंडन करतील-असा मला पूर्ण भरवंसा आहे.



सूचना.

हा ग्रंथ केवळ इंग्रजीचें भाषांतर नव्हे, जेणें करून हा विषय मराठी मध्यें चांगला दिसून सुबोध होईल, असा केला आहे. व हा ग्रंथ करण्यास ज्यांनीं मदत केली, त्यांचा मी मोठा आभारी आहें.

कार्यप्रकाशक चिन्हें.

हीं बहुतेक शिक्षामाला पुस्तकाचा प्रथम आणि दुसऱ्या भागांत सांगितलेलीं आहेत. परंतु या पुस्तकांत कांहीं विशेष आहेत; तीं लिहितों.

हें चिन्ह अधिक उणें दाखविण्याचें.

हें त्रिकोण वाचक.

हें कोन वाचक.

हें ह्मणून, किंवा याज करितां, या शब्दाचें वाचक.

यांचा उपयोग.

८ > ५, किंवा अ < ब यांत आठ पांचांहून किंवा ब, अ हून मोठा आहे; असें मध्य चिन्ह दाखवितें, ह्मणजे चिन्हांत पद आहे तें मोठें.

अबक △ हें त्रिकोण लिहावयाचा असतां त्रिकोणाचा कोनांवरील अक्षरें लिहून पुढें करितात.

< अ अथवा < कअब हें कोणताही कोन लिहावयाचा असतां, कोनस्थलींचें एक, किंवा कोन स्थलींचें मध्यें घेऊन तीन अक्षरें लिहून त्यांचा मागें करितात.

अ = ब . आणि ब = ड ∴ अ = ड एथे अ = ब आ

णि ब = ड आहे, याज करितां अ = ड आहे; यांत (∴) चा मागें जे तीन बिंदु आहेत; ते (म्हणून, याज करितां) या शब्दांचे वाचक आहेत.

या पुस्तकांत अक्षरांवर (⊥, ⊥⊥) इत्यादि चिन्हें आहेत; त्यांस अनुक्रमें, स चिन्ह, दोन चिन्ह, इत्यादि तें तें अक्षर म्हणावें.

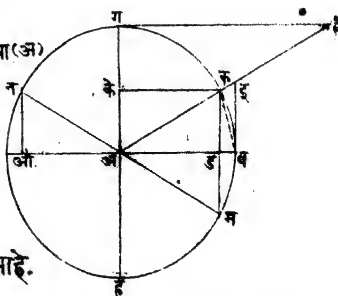
प्रकरण पहिलें.

सरळरेषत्रिकोणमिति.

भाग पहिला.

सरळरेषत्रिकोणमितींतील बहुतेक उपयोगी विषय शिक्षामालापुस्तकाचा दुसऱ्या भागांत सांगितलेले आहेत; परंतु गोलीय त्रिकोणमिति इत्यादि पुढील विषय समजण्यास तेवढ्यांनींच निर्वाह होत नाहीं. याजकरितां अनेक ग्रंथांचा आधारानें संक्षेपतः सुबोध होण्यासारिखा कांहीं विषय लिहितों.

१ कलम पहिलें. अर (बकगनफहम) या वर्तुळांत बक, कोंस बराबर (अ) व, अक = त्रिज्या = र, घेतला तर, बक कोंसाची लांबी = अक* × अ, आणि



$\frac{\text{कड}}{\text{अक}}$ = भुजज्या (अ), $\frac{\text{अड}}{\text{अक}}$ = कोभुजज्या (अ)

$\frac{\text{बइ}}{\text{अक}}$ = स्पर्श. (अ), $\frac{\text{गल}}{\text{अक}}$ = कोस्प. (अ)

$\frac{\text{अइ}}{\text{अक}}$ = छे. (अ), $\frac{\text{अल}}{\text{अक}}$ = कोछे. (अ);

$\frac{\text{बड}}{\text{अक}}$ = शर (अ), $\frac{\text{बक}}{\text{अक}}$ = ज्या (अ)

या प्रमाणें होतात हें उघड आहे.

---

* एथें त्रिज्या गुणकलावण्याचें कारण असें आहे कीं, मूळ त्रिज्या जितके पट वाढवावी; तितके पट (अ) कोंस व त्याची भुजज्या इत्यादि वाढतात. याविषयीं विस्तार पुढें लिहिला आहे.

आतां या आकृतींत कादकोन आणि सरूप त्रिकोण यांचा गुणां पासून एक त्रिज्येचा प्रमाणानें खालीं लिहिलेले, मारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$\text{कोअ}\cdot\text{छेअ} = १$ .... (१)

$\text{भुअ}\cdot\text{कोछेअ} = १$ .... (२)

$\text{स्पअ} = \frac{\text{भुअ}}{\text{कोअ}}$ .... (३)

$\text{कोस्पअ} = \frac{\text{कोअ}}{\text{भुअ}}$ .... (४)

$\text{स्पअ}\cdot\text{कोस्पअ} = १$ .... (५)

$\text{भु}^{२}\text{अ} + \text{को}^{२}\text{अ} = १$ .... (६)

$\text{छे}^{२}\text{अ} = १ + \text{स्प}^{२}\text{अ}$ .... (७)

$\text{कोछे}^{२}\text{अ} = १ + \text{कोस्प}^{२}\text{अ}$ .... (८)

इत्यादि किंवा.

$$\text{भुअ} = \frac{\text{स्पअ}}{\text{छेअ}} = \frac{\text{कोअ}}{\text{कोस्पअ}} = \frac{१}{\text{कोछेअ}}$$

$$\text{कोअ} = \frac{\text{भुअ}}{\text{स्पअ}} = \frac{\text{कोस्पअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{१}{\text{छेअ}}$$

$$\text{स्पअ} = \frac{\text{भुअ}}{\text{कोअ}} = \frac{\text{छेअ}}{\text{कोछेअ}} = \frac{१}{\text{कोस्पअ}}$$

+ अथवा या प्रमाणें ही दाखविलें आनें कीं, $\text{स्पअ}\cdot\text{कोस्पअ} = १$, $\text{कोस्पअ} = \frac{१}{\text{स्पअ}}$ आतां या समीकरणाचा दोनही बाजूंस (७) यानें गुणिलें असतां $७\cdot\text{कोस्पअ} = \frac{७}{\text{स्पअ}}$ या पासून दिसून येतें कीं, कोणतीही संख्या कोणत्याही कोंसाचा स्पर्शरेषेनें भागिलीतर भागाकार तीच संख्या पूर्वोक्त कोंसाचा कोस्पर्शरेषेनें गुणिली त्या गुणाकारा बरोबर होती. तसेंच दुसरें असें कळून येतें कीं, कोस्पर्शरेषेनें भागणें आणि स्पर्शरेषेनें गुणणें हें बरोबरच, आणखी हें ही उघड आहे कीं, कोभुजज्या व छेदनरेषा आणि भुजज्या व कोछेदनरेषा तसेंच कोण

$$कोस्पअ = \frac{कोअ}{भुअ} = \frac{कोछेअ}{छेअ} = \frac{१}{स्पअ}$$

$$छेअ = \frac{स्पअ}{भुअ} = \frac{कोछेअ}{कोस्पअ} = \frac{१}{कोअ}$$

$$कोछेअ = \frac{छेअ}{स्पअ} = \frac{कोस्पअ}{कोअ} = \frac{१}{भुअ}$$

ज्यां = २ शर, या प्रमाणें ही होतात

टीप. वरील आकृतींत बक = बम आहे. परंतु तो, अब त्रिज्ये-च्या खालच्या बाजूस आहे; ह्मणून त्याला (-अ) ह्मणतात. याच्या कल्पना वरून आणखी स्पष्ट आहे कीं, भु (-अ) = - भुअ; को (-अ) = कोअ, इत्यादि.

३ शिक्षामाला पुस्तका वरून स्पष्ट कळतें कीं, जर कोणत्याही दोन कोनांची बेरीज (९०°) आहे, तर ते कोन परस्परांचे कोपूर्ण आहेत. व एकाची जी भुजज्या, स्पर्शरेषा आणि छेदनरेषा ती अनुक्रमें दुसऱ्याची कोभुजज्या, कोस्पर्शरेषा, कोछेदनरेषा आहे.

४ जर या वरच्या आकृतींत < फअन, बअक कोना बरोबर करून, नओ, बफ वर लंब केला; तर नओ = कड, अओ = अड आहे. आतां जर, नओ, आणि अओ यांस त्रिज्येनें भागिलें तर भागाकार वर सांगितल्या प्रमाणें, बअन कोनाच्या भुजज्या

ती ही संख्या आणि तिचा व्युत्क्रम हे परस्पर संबंधानें असतात.

व कोभुजज्या होतील; हा ब अंन कोन व अंक कोनाच्या सप्लमेंट म्ह
णजे (१८०°) चा भरीचा आहे; याजकरितां उघड आहे कीं, अ
कोन व त्याचा सप्लमेंट याची भुजज्या बराबर आहे. आणि त्यां
चा कोभुजज्या, स्पर्शरेषा आणि छेदनरेषा या ही बराबर; प-
रंतु चिन्हें मात्र व्युत्क्रम आहेत. याजकरितां अर ब ग क अ-
र्ध परिघ भागिला, अ व त्रिज्येनें, बराबर ϖ* घेतला तर भुअ
= को ($\frac{ϖ}{२}$ - अ) = भु (२ϖ + अ) = भु (ϖ - अ) = ± भु
(२नϖ ± अ) = भु ((२न+१) ϖ - अ), को अ = - को (ϖ - अ)
= को (२ϖ + अ) = को (२नϖ ± अ) = - को ((२न+१) ϖ ± अ)

आहे. याजकरितां (३) सारणी कोष्टकाप्रमाणें स्प अ =
कोस्प ($\frac{ϖ}{२}$ - अ) = - स्प (ϖ - अ) = स्प (२ϖ + अ) =
स्प (नϖ + अ) = - स्प (नϖ - अ) इत्यादि होतील.

टीप. यावरून असें सिद्ध होतें कीं, कोणत्या ही सरळ रेघ
त्रिकोणाचा एका कोनाची भुजज्या दुसऱ्या दोन कोनांच्या बेर-
जेचा भुजज्ये बराबर आहे. आणि कोभुजज्या, उणी कोभुजज्ये
बराबर आहे इत्यादि.

५ वरील कलमांत सिद्ध झालेले सारणी कोष्टक खालीं
लिहितों.

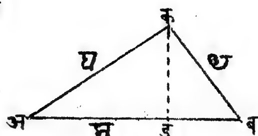
---

* ϖ = १८०° समजावे.

$$भुअ = \pm भु(२नघ \pm अ) = भु((२न+१)घ - अ) \cdots (९)$$

$$कोअ = को(२नघ \pm अ) = -को((२न+१)घ - अ) \cdots (१०)$$

$$स्पअ = स्प(नघ + अ) = -स्प(नघ - अ) \cdots\cdots (११)$$



या त्रिकोणांत (१) कलमा प्रमाणें, $भुअ = \frac{कड}{अक}$, आणि $भुब = \frac{कड}{बक}$, आहे.

आतां अ, ब, क कोनां समोरील बाजू दाखविण्यास अनुक्रमें छ, घ, म घेऊन वरील दोन समीकरणांचे छेद सोडवून किंमत ठेविली असतां $घ \cdot भुअ = कड$, $छ \cdot भुब = कड$ असें होतें. यांतील, कड चा किंमती परस्पर बराबर लिहून $छ \cdot भुब = घ \cdot भुअ$ याचे गुणक सोडवून $\frac{भुब}{भुअ} = \frac{घ}{छ}$ या प्रमाणें शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांतील त्रिकोणमितीचा (१ सि० प्र०) सिद्ध होतें.

ह्मणून $\frac{भुक}{भुअ} = \frac{म}{छ}$ घे. आणि या समीकरणाचे छेद सोडीव नर

$$भुक = \frac{म \cdot भुअ}{छ} = \frac{(अड + बड) \cdot भुअ}{छ}$$

यांत (अड) आणि (बड) यांचा किंमती ठेवून.

$$भुक = \frac{(घ \cdot कोअ + छ \cdot कोब) \cdot भुअ}{छ}$$ भाजकानें भागून.

$$= \left(\frac{घ}{छ} \cdot कोअ + कोब\right) भुअ$$ यांत वर सिद्ध केल्या प्रमाणें किंमत ठेव.

$$= \left(\frac{भुब}{भुअ} \cdot कोअ + कोब\right) \cdot भुअ$$ गुणकानें गुणून.

$भुक = भुब \cdot कोअ + भुअ \cdot कोब$ यांत (४) कलमांतील दिले

प्रमाणें किंमत ठेवून.

भु(अ+ब) = भुअ·कोब + कोअ·भुब ....(१२)

आतां या सारणी कोष्टकांत (ब) च्या ठिकाणीं (−ब) कीं समानून धाची (२) कलमांतील रीतिप्रमाणें किंमत ठेव.

भु(अ-ब) = भुअ·कोब − कोअ·भुब ....(१३)

या सारणी कोष्टकांत (अ) च्या ठिकाणीं (९०°−अ) लिहून (३) कलमाप्रमाणें किंमत ठेविली असतां पुढें लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

भु{(९०°−अ)−ब} = भु(९०°−(अ+ब)) =

को(अ+ब) = कोअ·कोब − भुअ·भुब ....(१४)

या सारणी कोष्टकांत (ब) कोनाच्या ठिकाणीं (−ब) धरून.

को(अ−ब) = कोअ·कोब + भुअ·भुब ....(१५)

७ आतां (१२) आणि (१३) या सारणी कोष्टकांची बेरीज व वजाबाकी घेऊन खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

भु(अ+ब)+भु(अ−ब) = २ भुअ·कोब .....(१६)

भु(अ+ब)−भु(अ−ब) = २ कोअ·भुब .....(१७)

याच रितीनें (१५) आणि (१४) या सारणी कोष्टकांची बेरीज व वजाबाकी घेऊन.

$$\text{को}(\text{अ}-\text{ब})+\text{को}(\text{अ}+\text{ब})=२\,\text{कोअ}\cdot\text{कोब} \quad \cdots\cdots(१८)$$

$$\text{को}(\text{अ}-\text{ब})-\text{को}(\text{अ}+\text{ब})=२\,\text{भुअ}\cdot\text{भुब} \quad \cdots\cdots(१९)$$

८ जर वरील सारणी कोष्टकांत (अ+ब) = अ आणि (अ−ब) = ब असें मानिलें, तर या दोन समीकरणांची बेरीज वजाबाकी यांज पासून २अ = अ+ब व, २ब = अ−ब होईल. यास दोहोंनीं भागून अ = $\frac{१}{२}$ (अ+ब) आणि ब = $\frac{१}{२}$ (अ−ब) आहे. या किमती (१६), (१७), (१८), (१९) सारणी कोष्टकांत ठेविल्या असतां खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टकें उत्पन्न होतात.

$$\text{भुअ}+\text{भुब}=२\,\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{को}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब}) \quad \cdots(२०)$$

$$\text{भुअ}-\text{भुब}=२\,\text{को}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब}) \quad \cdots(२१)$$

$$\text{कोब}+\text{कोअ}=२\,\text{को}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{को}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब}) \quad \cdots(२२)$$

$$\text{कोब}-\text{कोअ}=२\,\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब}) \quad \cdots(२३)$$

आतां (२१) सारणी कोष्टकास (२०) सारणी कोष्टकानें भागून.

$$\frac{\text{भुअ}-\text{भुब}}{\text{भुअ}+\text{भुब}}=\frac{२\,\text{को}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब})}{२\,\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{को}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब})}$$

या समीकरणाचा उजव्या बाजूंत (४) व (३) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेवून

$$\frac{\text{भुअ}-\text{भुब}}{\text{भुअ}+\text{भुब}}=\text{कोस्प}\tfrac{१}{२}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{स्प}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब})$$ यांत ए

कवेळ कोस्पर्शरेषेची व पुनः स्पर्शरेषेची (२) कलमांतील किंमत ठेवून.

$$\frac{भुअ - भुब}{भुअ + भुब} = \frac{स्प \frac{1}{2}(अ-ब)}{स्प \frac{1}{2}(अ+ब)} = \frac{कोस्प \frac{1}{2}(अ+ब)}{कोस्प \frac{1}{2}(अ-ब)} \quad \cdots (२४)$$

याच प्रमाणें (२३) यास (२२) यानें भागून खालीं लिहिलेलं सारणी कोष्टक उत्पन्न होतें.

$$\frac{कोब - कोअ}{कोब + कोअ} = \frac{२ भु \frac{1}{2}(अ+ब) \cdot भु \frac{1}{2}(अ-ब)}{२ को \frac{1}{2}(अ+ब) \cdot को \frac{1}{2}(अ-ब)}$$ या समीकरणाचा उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून

$$\frac{कोब - कोअ}{कोब + कोअ} = स्प \frac{1}{2}(अ+ब) \cdot स्प \frac{1}{2}(अ-ब)$$ या न पर्यायानें स्पर्शरेषेचा (२) कलमांतील किमती ठेवून.

$$\frac{कोब - कोअ}{कोब + कोअ} = \frac{स्प \frac{1}{2}(अ+ब)}{कोस्प \frac{1}{2}(अ-ब)} = \frac{स्प \frac{1}{2}(अ-ब)}{कोस्प \frac{1}{2}(अ+ब)} \quad \cdots (२५)$$

वर लिहिल्या रितीनें (२०) यास (२२) यानें भागून.

$$\frac{भुअ + भुब}{कोअ + कोब} = \frac{२ भु \frac{1}{2}(अ+ब) \cdot को \frac{1}{2}(अ-ब)}{२ को \frac{1}{2}(अ+ब) \cdot को \frac{1}{2}(अ-ब)}$$ भाजकानें भागून उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.

$$\frac{भुअ + भुब}{कोअ + कोब} = स्प \frac{1}{2}(अ+ब) \quad \cdots (२६)$$

याच रितीप्रमाणें (२३), (२२), (२१) या सारणी कोष्टकांस अनुक्रमें (२१), (२०), (२२) या सारणी कोष्टकांहीं भागून उजव्या बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेविली

असतां पुढें लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\frac{\text{कोब} - \text{कोअ}}{\text{भुअ} - \text{भुब}} = \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब}) \qquad (२७)$$

$$\frac{\text{कोब} - \text{कोअ}}{\text{भुअ} + \text{भुब}} = \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब}) \qquad (२८)$$

$$\frac{\text{भुअ} - \text{भुब}}{\text{कोब} + \text{कोअ}} = \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब}) \qquad (२९)$$

१० आतां (२०), (२२), (२३) या सारणी कोष्टकांत ब = अंश मानिले, तर खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{भुअ} = २\,\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{अ} \qquad (३०)$$

$$1 + \text{कोअ} = २\,\text{को}^{2}\tfrac{1}{2}\text{अ} \qquad (३१)$$

$$1 - \text{कोअ} = २\,\text{भु}^{2}\tfrac{1}{2}\text{अ} \qquad (३२)$$

११ याच प्रमाणें (३०) सारणी कोष्टकांत (अ) याचा ठिकाणीं (अ + ब) आणि (अ - ब) पर्यायानें ठेविले असतां खालीं लिहिलेलीं समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}(\text{अ}+\text{ब}) = २\,\text{भु}\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब})$$

$$\text{भु}(\text{अ}-\text{ब}) = २\,\text{भु}\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब})\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब})$$

आतां या समीकरणांतील प्रथमास (२०) सारणी कोष्टकानें भागून.

$$\frac{\text{भु}(\text{अ}+\text{ब})}{\text{भुअ}+\text{भुब}} = \frac{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब})}{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब})} \qquad (३३)$$

याच रितीनें दुसऱ्या व पहिल्या समीकरणांस (२१) सारणी कोष्टकानें भागून.

$$\frac{भु(अ-ब)}{भुअ-भुब} = \frac{को\frac{१}{२}(अ-ब)}{को\frac{१}{२}(अ+ब)} \cdots\cdots (३४)$$

$$\frac{भु(अ+ब)}{भुअ-भुब} = \frac{भु\frac{१}{२}(अ+ब)}{भु\frac{१}{२}(अ-ब)} \cdots\cdots (३५)$$

तसेंच दुसऱ्या समीकरणास (२०) सारणी कोष्टकानें भागू:

$$\frac{भु(अ-ब)}{भुअ+भुब} = \frac{भु\frac{१}{२}(अ-ब)}{भु\frac{१}{२}(अ+ब)} \cdots\cdots (३६)$$

१२ जर (३०) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (२अ) मानिला, तर पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$भु२अ = २भुअ \cdot कोअ \cdots\cdots (३७)$$

याच रितीनें (३१) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (२अ) मानून, स्थलांतरानें आणि २कोंअ ची भुजज्येंत किंमत ठेविल्यापासून येणारें जें समीकरण त्यांत (६) सारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेविली असतां पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$को२अ = २को^२अ - १ = १ - २भु^२अ = को^२अ - भु^२अ \cdots (३८)$$

१३ आतां (१२) सारणी कोष्टकास (१४) सारणी कोष्टकानें भागून.

$$\frac{भु(अ+ब)}{को(अ+ब)} = \frac{भुअ \cdot कोब + कोअ \cdot भुब}{कोअ \cdot कोब - भुअ \cdot भुब}$$

या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील अंश व छेद यांस (कोअ·कोब) यानें भागून, दोनही बाजूंत (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.

$$स्प (अ+ब) = \frac{स्पअ + स्पब}{१ - स्पअ \cdot स्पब} \cdots\cdots (३९)$$

याचरितीनें (१३) यास (१५) यानें भागून, पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतें.

$$स्प (अ-ब) = \frac{स्पअ - स्पब}{१ + स्पअ \cdot स्पब} \cdots\cdots (४०)$$

०४ आतां (१४) सारणी कोष्टकास (१२) सारणी कोष्टकानें भागून

$\frac{को (अ+ब)}{भु (अ+ब)} = \frac{कोअ \cdot कोब - भुअ \cdot भुब}{भुअ \cdot कोब + कोअ \cdot भुब}$ या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील अंश व छेद यांस (भुअ·भुब) यानें भागून दोनही बाजूंत (४) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.

$$कोस्प (अ+ब) = \frac{कोस्पअ \cdot कोस्पब - १}{कोस्पब + कोस्पअ} \cdots\cdots (४१)$$

याच प्रमाणें (१५) यास (१३) यानें भागून खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$कोस्प (अ-ब) = \frac{कोस्पअ \cdot कोस्पब + १}{कोस्पब - कोस्पअ} \cdots\cdots (४२)$$

१५ आतां (१२) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (अ+ब) आणि (ब) चा ठिकाणीं (क) ठेविले असतां, त्याचें रूप खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$\text{भु}((\text{अ}+\text{ब})+\text{क}) = \text{भु}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{कोक}+\text{को}(\text{अ}+\text{ब})\cdot\text{भुक}$$

यात भु(अ+ब) आणि को(अ+ब) यांचा (१२) व (१४) सारणी कोष्टकांतील किमती ठेवून.

$$\text{भु}(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}) = (\text{भुअ}\cdot\text{कोब}+\text{कोअ}\cdot\text{भुब})\cdot\text{कोक} + (\text{कोअ}\cdot\text{कोब}-\text{भुअ}\cdot\text{भुब})\cdot\text{भुक}$$

उजव्या बाजूतील गुणकांनीं गुणून.

$$\text{भु}(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}) = \text{भुअ}\cdot\text{कोब}\cdot\text{कोक}+\text{कोअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{कोक} + \text{कोअ}\cdot\text{कोब}\cdot\text{भुक}-\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}$$

याच प्रमाणें (१४) सारणी कोष्टकांत वर लिहिलेल्या किमती ठेवून पुढील समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{को}(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}) = \text{कोअ}\cdot\text{कोब}\cdot\text{कोक}-\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{कोक} - \text{भुअ}\cdot\text{कोब}\cdot\text{भुक}-\text{कोअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}$$

या दोन समीकरणांतील प्रथमास दुसऱ्यानें भाग आणि उजव्या बाजूचे अंश व छेद यांस (कोअ·कोब·कोक) यानें गूनत्या समीकरणाचा दोनही बाजूंत (२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव; ह्मणजे खालीं लिहिलेला सारणीष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{स्प}(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}) = \frac{\text{स्पअ}+\text{स्पब}+\text{स्पक}-\text{स्पअ}\cdot\text{स्पब}\cdot\text{स्पक}}{1-\text{स्पअ}\cdot\text{स्पब}-\text{स्पअ}\cdot\text{स्पक}-\text{स्पब}\cdot\text{स्पक}} \quad ----(१$$

याच प्रमाणें वरील दुसऱ्या समीकरणास प्रथमानें भाग, अ

णि उ.अंच्या बाजूंतील अंशव छेद यांस (भुअ·भुब·भुक) याने भागून, त्या समीकरणांत (४) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव. म्हणजे पुढें लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{कोस्प}(\text{अ}+\text{ब}+\text{क}) = \frac{\text{कोस्पअ}\cdot\text{कोस्पब}\cdot\text{कोस्पक} - \text{कोस्पअ} - \text{कोस्पब} - \text{कोस्पक}}{\text{कोस्पअ}\cdot\text{कोस्पब} + \text{कोस्पअ}\cdot\text{कोस्पक} + \text{कोस्पब}\cdot\text{कोस्पक} - १}$$

१६ जर (३९), (४१) या सारणी कोष्टकांत अ = ब धरल्यास खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{स्प}२\text{अ} = \frac{२\text{स्पअ}}{१ - \text{स्प}^{२}\text{अ}} \quad - - - - - - - - - - - - (४५)$$

$$\text{कोस्प}२\text{अ} = \frac{\text{कोस्प}^{२}\text{अ} - १}{२\text{कोस्पअ}} \quad - - - - - - - - - - - (४६)$$

१७ जर (अ+ब) = नअ, मानिला तर स्थलांतरानें व साधारण गुणक काढून, ब = (न − १) अ आहे. या किमती (३९) सारणी कोष्टकांत ठेवून.

$$\text{स्पनअ} = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्प}(\text{न}-१)\text{अ}}{१ - \text{स्पअ}\cdot\text{स्प}(\text{न}-१)\text{अ}}$$ या समीकरणांत न = २ धरून.

$$\text{स्प}३\text{अ} = \frac{\text{स्पअ} + \text{स्प}२\text{अ}}{१ - \text{स्पअ}\cdot\text{स्प}२\text{अ}}$$ यांत (४५) सारणी कोष्टकांतील (स्प२अ) ची किंमत ठेवून.

$$\text{स्प}३\text{अ} = \left.\frac{\text{स्पअ} + \frac{२\text{स्पअ}}{१-\text{स्प}^{२}\text{अ}}}{१ - \text{स्पअ}\cdot\frac{२\text{स्पअ}}{१-\text{स्प}^{२}\text{अ}}}\right\}$$ छेद सोडवून.

$$\text{स्प ३अ} = \left.\frac{\dfrac{\text{स्पअ} - \text{स्प}^{3}\text{अ} + \text{२स्पअ}}{\text{१} - \text{स्प}^{2}\text{अ}}}{\dfrac{\text{१} - \text{स्प}^{2}\text{अ} - \text{२स्प}^{2}\text{अ}}{\text{१} - \text{स्प}^{2}\text{अ}}}\right\} = \frac{\text{३स्पअ} - \text{स्प}^{3}\text{अ}}{\text{१} - \text{३स्प}^{2}\text{अ}}$$

$$\text{स्प ३अ} = \frac{\text{३स्पअ} - \text{स्प}^{3}\text{अ}}{\text{१} - \text{३स्प}^{2}\text{अ}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{४७})$$

या प्रमाणें वर सांगितलेल्या किंमती (४१) सारणी कोष्टकांत ठेवून.

$$\text{कोस्पनअ} = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्प(न-१)अ} - \text{१}}{\text{कोस्पअ} + \text{कोस्प(न-१)अ}},$$ या समीकरणांत न = ३ धरून.

$$\text{कोस्प ३अ} = \frac{\text{कोस्पअ} \cdot \text{कोस्प२अ} - \text{१}}{\text{कोस्पअ} + \text{कोस्प२अ}}$$ यांत (४६) सारणी कोष्टकांतील (कोस्प२अ) ची किंमत ठेवून.

$$\text{कोस्प ३अ} = \left.\frac{\text{कोस्पअ} \cdot \dfrac{\text{कोस्प}^{2}\text{अ} - \text{१}}{\text{२कोस्पअ}} - \text{१}}{\text{कोस्पअ} + \dfrac{\text{कोस्प}^{2}\text{अ} - \text{१}}{\text{२कोस्पअ}}}\right\}$$ छेद सम करून भागाकारानें.

$$\text{कोस्प ३अ} = \frac{\text{कोस्प}^{3}\text{अ} - \text{कोस्पअ} - \text{२कोस्पअ}}{\text{२कोस्प}^{2}\text{अ} + \text{कोस्प}^{2}\text{अ} - \text{१}} = \frac{\text{कोस्प}^{3}\text{अ} - \text{३कोस्पअ}}{\text{३कोस्प}^{2}\text{अ} - \text{१}}$$

$$\text{कोस्प ३अ} = \frac{\text{कोस्प}^{3}\text{अ} - \text{३कोस्पअ}}{\text{३कोस्प}^{2}\text{अ} - \text{१}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{४८})$$

१८ आतां (३२) सारणी कोष्टकास (३०) सारणी कोष्टकानें भागून, त्यांत (३) सारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेव; ह्मणजे पुढें लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$\frac{१ - \text{को} अ}{\text{भु} अ} = \text{स्प} \frac{१}{२} अ$ - - - - - - - - - - - - - (४९)

या सारणी कोष्टकाचा डाव्या बाजूतील अंश पदास भाजकानें पृथक् पृथक् भागून, त्यांत (२) कलमांत सांगितलेल्या किमती ठेविल्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$\text{को छे} अ - \text{को स्प} अ = \text{स्प} \frac{१}{२} अ$ - - - - - - - - - - (५०)

आतां (४६) सारणी कोष्टकास दोन यांनीं गुणून खालीं लिहिल्याप्रमाणें.

$२\text{को स्प} २अ = \frac{\text{को स्प} अ - १}{\text{को स्प} अ}$ या समीकरणाच्या उजव्या बाजूतील अंश पदास भाजकानें पृथक् पृथक् भागून, त्यांत (२) कलमांतील किंमत ठेव, म्हणजे पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$२\text{को स्प} २अ = \text{को स्प} अ - \text{स्प} अ$ - - - - - - - - - (५१)

१९ जर (१३), (१५) या सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (४५°) आणि (ब) चा ठिकाणीं ($\frac{१}{२}$ अ) ठेविले, तर त्या सारणी कोष्टकाचें रूप खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$\text{भु} (४५° - \frac{१}{२} अ) = \text{भु} ४५° \cdot \text{को} \frac{१}{२} अ - \text{को} ४५° \cdot \text{भु} \frac{१}{२} अ$

$\text{को} (४५° - \frac{१}{२} अ) = \text{को} ४५° \cdot \text{को} \frac{१}{२} अ + \text{भु} ४५° \cdot \text{भु} \frac{१}{२} अ$

आतां (३) कलमाप्रमाणें भु ४५° = को ४५° आहे; याजकरितां या दोन समीकरणांत को ४५° याचा ठिकाणीं भु ४५° लिहून

$$भु(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = भु ४५^{\circ} \cdot को \frac{1}{2} अ - भु ४५^{\circ} \cdot भु \frac{1}{2} अ$$

$$को(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = भु ४५^{\circ} \cdot को \frac{1}{2} अ + भु ४५^{\circ} \cdot भु \frac{1}{2} अ$$

या समीकरणांचा उजव्या बाजूंतील साधारण गुणक काढून.

$$भु(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = भु ४५^{\circ} (को \frac{1}{2} अ - भु \frac{1}{2} अ) \cdots\cdots (क्ष)$$

$$को(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = भु ४५^{\circ} (को \frac{1}{2} अ + भु \frac{1}{2} अ) \cdots\cdots (य)$$

या दोन समीकरणांतील प्रथमास दुसऱ्यानें भागून, (३) सारणी कोष्टका प्रमाणें डाव्या बाजूंत किमत ठेव.

$$स्प(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = \frac{को \frac{1}{2} अ - भु \frac{1}{2} अ}{को \frac{1}{2} अ + भु \frac{1}{2} अ}$$

या समीकरणाचा उजव्या बाजूंतील अंश छेदांस $(को \frac{1}{2} अ - भु \frac{1}{2} अ)$ यानें गूण.

$$स्प(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = \frac{को^{2} \frac{1}{2} अ - २ भु \frac{1}{2} अ \cdot को \frac{1}{2} अ + भु^{2} \frac{1}{2} अ}{को^{2} \frac{1}{2} अ - भु^{2} \frac{1}{2} अ}$$ याचा उजव्या बाजूंतील अंशांत (६) व (३०) आणि छेदांत (२८) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किमती ठेव.

$$स्प(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = \frac{1 - भु अ}{को अ}$$ या समीकरणाचा उजव्या बाजूंतील अंश पदांस भाजकानें पृथक् पृथक् भागून, त्यांत (२) कलमांत सांगितलेल्या किमती ठेविल्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$स्प(४५^{\circ} - \frac{1}{2} अ) = छे अ - स्प अ \cdots\cdots\cdots (५२)$$

तसेंच (३१) सारणी कोष्टकास (३०) सारणी कोष्टकानें भागू

न त्यांत (२) कलमांप्रमाणें किमती ठेविल्या असतां खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{अ} = \text{कोछेअ} + \text{कोस्पअ} \quad \text{- - - - - - (५३)}$$

२४ आतां (७१८) कलमांतील (य) समीकरणास (क्ष) समीकरणानें भागून, खालीं लिहिल्याप्रमाणें होते.

$$\frac{\text{को}(४५^\circ - \tfrac{1}{2}\text{अ})}{\text{भु}(४५^\circ - \tfrac{1}{2}\text{अ})} = \frac{\text{को}\tfrac{1}{2}\text{अ} + \text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}}{\text{को}\tfrac{1}{2}\text{अ} - \text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}}$$

याच्या डाव्या बाजूंत (४) सारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेवून, उजव्या बाजूंतील अंश व छेद यांस (को $\tfrac{1}{2}$ अ + भु $\tfrac{1}{2}$ अ) यानें गूण.

$$\text{कोस्प}(४५^\circ - \tfrac{1}{2}\text{अ}) = \frac{\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{अ} + २\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{अ} + \text{भु}^2\tfrac{1}{2}\text{अ}}{\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{अ} - \text{भु}^2\tfrac{1}{2}\text{अ}}$$

या समीकरणाच्या उजव्या बाजूंतील अंशांत (६) व (३०) आणि छेदांत (२८) सारणी कोष्टकांप्रमाणें किमती ठेव.

$$\text{कोस्प}(४५^\circ - \tfrac{1}{2}\text{अ}) = \frac{१ + \text{भुअ}}{\text{कोअ}};$$ याच्या उजव्या बाजूंतील अंशपदांस भाजकानें पृथक् पृथक् भागून त्यांत (२) कलमांत सांगितल्या किमती ठेवित्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{कोस्प}(४५^\circ - \tfrac{1}{2}\text{अ}) = \text{छेअ} + \text{स्पअ} \quad \text{- - - - - - (५४)}$$

२१ आतां (१२, (१४) या सारणी कोष्टकांत (अ) आणि (ब) याचा ठिकाणीं (१९) कलमांत सांगितलेल्या त्यांचा किमती ठेविल्या असतां, त्याच कलमांतील रिती प्रमाणें पुढील समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}\left(४५^\circ+\frac{१}{२}\text{अ}\right) = \text{भु}\ ४५^\circ\left(\text{को}\frac{१}{२}\text{अ}+\text{भु}\frac{१}{२}\text{अ}\right)$$

$$\text{को}\left(४५^\circ+\frac{१}{२}\text{अ}\right) = \text{भु}\ ४५^\circ\left(\text{को}\frac{१}{२}\text{अ}-\text{भु}\frac{१}{२}\text{अ}\right)$$

या दोन समीकरणांतील दुसऱ्यास प्रथमानें व प्रथमास दुसऱ्यानें पृथक् पृथक् भागून (५४) आणि (५२) सारणी कोष्टकांचा रितीनें खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{कोस्प}\left(४५^\circ+\frac{१}{२}\text{अ}\right) = \text{छे अ} - \text{स्प अ} \quad - - - - (५५)$$

$$\text{स्प}\left(४५^\circ+\frac{१}{२}\text{अ}\right) = \text{छे अ} + \text{स्प अ} \quad - - - - (५६)$$

आतां (५६) सारणी कोष्टकांतून (५२) सारणीकोष्टक वजा करून स्थलांतरानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्प}\left(४५^\circ+\frac{१}{२}\text{अ}\right) = \text{स्प}\left(४५^\circ-\frac{१}{२}\text{अ}\right)+२\,\text{स्प अ} \quad - - (५७)$$

२२ जर (६) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (४५°) मानिलें तर खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$\text{भु}^२ ४५^\circ + \text{को}^२ ४५^\circ = १$ आतां (३) कलमा प्रमाणें भु ४५° = को ४५° आहे; याजकरितां या समीकरणांत को ४५° याचा ठिकाणीं भु ४५° लिहून.

$भु^{२} ४५^{०} + भु^{२} ४५^{०} = १$ बेरीज घेऊन.

$२ भु^{२} ४५^{०} = १$ गुणक सोडवून.

$भु^{२} ४५^{०} = \frac{१}{२}$ मूळ काढल्यानें, $भु\ ४५ = \sqrt{\frac{१}{२}}$ अति सरळ रूप देऊन (३) कलमाप्रमाणें किंमत ठेविली असतां.

$भु\ ४५^{०} = को\ ४५^{०} = \sqrt{\frac{१}{२}} = \frac{१}{२}\sqrt{२}$ - - - - - - (५८)

याच रितीनें (३) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (४५°) ही किंमत ठेविली असतां पुढें लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$स्प\ ४५^{०} = \frac{भु\ ४५^{०}}{को\ ४५^{०}}$ } यांत को ४५° याची वरचा सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून.

$स्प\ ४५ = \frac{भु\ ४५^{०}}{भु\ ४५^{०}} = १$; आतां (३) कलमाप्रमाणें किंमत लिहून.

$स्प\ ४५^{०} = कोस्प\ ४५^{०} = १$ - - - - - - - - - (५९)

वरचा रितीप्रमाणेंच (७) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (४५°) लिहून, (५९) सारणी कोष्टकांतील (स्प ४५°) याची किंमत ठेविली असतां (३) कलमाचा साह्यानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतें.

$छे\ ४५ = कोछे\ ४५^{०} = \sqrt{२}$ - - - - - - - - (६०)

२२ आतां (३०) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (९०°)

ठेविले, तर खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

भु ६०° = २ भु ३०° · को ३०°, यांत (३) कलमा प्रमाणें को ३०° याचा ठिकाणीं भु ६०° लिहून.

भु ६०° = २ भु ३०° · भु ६०° या समीकरणाचा दोनही बाजूस (भु ६०°) यानें भागून.

१ = २ भु ३०° गुणक सोडवून (३) कलमा प्रमाणें किंमत ठेविली असतां.

$$\text{भु } 30^\circ = \text{को } 60^\circ = \tfrac{1}{2} \quad \text{- - - - - - - - (६१)}$$

याच प्रमाणें जर (३१) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (६०°) मानिले, तर खालीं लिहिल्या प्रमाणें होइल.

२ को² ३०° = १ + को ६०° यांत (६१) सारणी कोष्टकांतील (को ६०°) याची किंमत ठेवून.

२ को² ३०° = १ + ½ ; बेरीज घेऊन गुणक सोडविल्यानें

को² ३०° = ¾ , मूळ काढून, (३) कलमा प्रमाणें किंमत ठेविली असतां.

$$\text{को } 30^\circ = \text{भु } 60^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{- - - - (६२)}$$

याच प्रमाणें खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक सुलभ रितीनें उत्पन्न होतात.

$$\text{स्प } 30^\circ = \text{कोस्प } 60^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{- - - - (६३)}$$

कोस्प ३०° = स्प ६०° = √३ - - - - - - - - (६४)

छे ३०° = कोछे ६०° = √(४/३) = (२/३)√३ - - - - - (६५)

कोछे ३०° = छे ६०° = २ - - - - - - - - - - (६६)

२४ जर (३७), (३८) या सारणी कोष्टकांत (अ) च्या ठिकाणीं (३६°) ठेविलें, तर त्या सारणी कोष्टकाचें रूप खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

भु (७२°) = २ भु ३६° · को ३६° - - - (फ)

को ७२° = २ को² ३६° − १ - - - - (ग)

आतां भु १०८° = भु (७२° + ३६°) आहे; याज करितां (१२) सारणी कोष्टकांत (अ) च्या ठिकाणीं (७२°) आणि (ब) च्या ठिकाणीं (३६°) ठेविले असतां, त्याचें रूप पुढें लिहिल्या प्रमाणें होईल.

भु (७२° + ३६°) = भु ७२° · को ३६° + को ७२° · भु ३६°

या समीकरणांत (भु ७२°) आणि (को ७२°) आहे, त्या ठिकाणीं (फ) व (ग) या समीकरणांतील त्यांचा त्यांचा किमती ठेवून,

भु (७२° + ३६°) = २ भु ३६° · को² ३६° + २ को² ३६° · भु ३६° − भु ३६°

अथवा

भु (७२° + ३६°) = ४ को² ३६° · भु ३६° − भु ३६°

या समीकरणाच्या डाव्या बाजूंत (४) कलमाच्या टिपे प्रमाणें किंमत ठेवून.

$\text{भु } ७२^\circ = ४ \text{ को}^२ ३६^\circ \cdot \text{भु } ३६^\circ - \text{भु } ३६^\circ$ या समीकरणाचा डाव्या बाजूंत (भु ७२°) आहे; त्या ठिकाणीं त्याची (फ?) समीकरणांतील किंमत ठेवून.

$२ \text{ भु } ३६^\circ \cdot \text{को } ३६^\circ = ४ \text{ को}^२ ३६^\circ \cdot \text{भु } ३६^\circ - \text{भु } ३६^\circ$ या समीकरणास (भु ३६°) यानें भाग.

$२ \text{ को } ३६^\circ = ४ \text{ को}^२ ३६^\circ - १$ स्थलांतर करून चिन्हें बदलकर.

$४ \text{ को}^२ ३६^\circ - २ \text{ को } ३६^\circ = १$ गुणक सोडीव.

$\text{को}^२ ३६^\circ - \frac{२}{४} \text{ को } ३६^\circ = \frac{१}{४}$ वर्ग पुरा कर.

$\text{को}^२ ३६^\circ - \frac{२}{४} \text{ को } ३६^\circ + \frac{१}{१६} = \frac{५}{१६}$ वर्गमूळ काढ.

$\text{को } ३६^\circ = \frac{१}{४} = \pm \frac{१}{४} \sqrt{५}$ स्थलांतरानें.

$\text{को } ३६^\circ = \frac{१}{४} + \frac{१}{४} \sqrt{५}$ साधारण गुणक काढून (३) कलमा प्रमाणें किंमत ठेविली असतां.

$\text{को } ३६^\circ = \text{भु } ५४^\circ = \frac{१}{४}(१ + \sqrt{५})$ - - - - (६७)

आतां (भू० ३४ सि०) पासून (६) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणारें जें समीकरण त्यांत (को ३६°) याची (६७) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून, (२) कलमाच्या साह्यानें

खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$भु ३६^\circ = को ५४^\circ = \frac{१}{४}\sqrt{१०-२\sqrt{५}} \quad ......(६८)$$

याच प्रमाणें (३८) सारणी कोष्टकांत (अ) चा ठिकाणीं (३६°) ठेविले असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

∴ को ७२° = २को² ३६°-१ या समीकरणांत (को ३६°) याची (६७) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून.

$$को ७२^\circ = २\left(\frac{१}{४}(१+\sqrt{५})\right)^२-१$$ उजव्या बाजूंतील प्रथम पदाचा वर्ग करून एक वजा कर.

$$को ७२^\circ = \frac{२}{१६} + \frac{४}{१६}\sqrt{५} + \frac{१०}{१६} - \frac{१६}{१६} = \frac{-४}{१६} + \frac{४}{१६}\sqrt{५}$$

साधारण गुणक काढून (३) कलमा प्रमाणें किंमत ठेविली असतां.

$$को ७२^\circ = भु १८^\circ = \frac{१}{४}(-१+\sqrt{५}) \quad ......(६९)$$

आतां (भू० ३४ सि०) पासून (६) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणारें जें समीकरण त्यांत (को ७२°) याची (६९) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून (३) कलमाचा साह्यानें खालीं लिहिला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$भु ७२^\circ = को १८^\circ = \frac{१}{४}\sqrt{१०+२\sqrt{५}} \quad ....(७०)$$

२५ जर (१७) सारणी कोष्टकांत अ = ६°आणि ब = अ मानिला, तर त्या सारणी कोष्टकाचें रूप पुढें लिहिल्या प्रमा

णें होतें.

भु(६०° + अ) − भु(६०° − अ) = २को ६०°·भुअ यांत (को ६०°) यांची (६१) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून; स्थलांतरानें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

भु(६०° + अ) = भु(६०° − अ) + भुअ - - - - (७१)

आतां (६७) सारणी कोष्टकांतून (६९) सारणी कोष्टक वजा करून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें-

भु ५४° − भु १८° = $\frac{१}{२}$ या समीकरणास (२ को अ) यानें गूण:

२भु ५४°·को अ − २भु १८°·को अ = को अ

याच्या डाव्या बाजूंत (७६) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

भु(५४° + अ) + भु(५४° − अ) − भु(१८° + अ) − भु(१८° − अ) = कोअ - - (७२

२८ आतां (कोअ + भुअ) = (कोअ + भुअ) आणि (कोअ − भुअ) = (कोअ − भुअ) आहे, म्हणून या दोन समीकरणांचे वर्ग ही बराबर आहेत. याजकरितां,

(कोअ + भुअ)^२ = को^{२}अ + २भुअ·कोअ + भु^{२}अ

(कोअ − भुअ)^२ = को^{२}अ − २भुअ·कोअ + भु^{२}अ

या दोन समीकरणांच्या उजव्या बाजूंत (६), (३५) सारणी

कोष्टकांतील किमती ठेवून दोन्ही बाजूंचीं वर्गमुळें काढ

$$\left.\begin{array}{l} \text{को}\,\text{अ} + \text{भु}\,\text{अ} = \sqrt{१ + \text{भु}\,२\text{अ}} \\ \text{को}\,\text{अ} - \text{भु}\,\text{अ} = \sqrt{१ - \text{भु}\,२\text{अ}} \end{array}\right\}$$ या दोन समीकरणाची

बेरीज व वजाबाकी घेऊन, येणारीं जीं समीकरणें त्यांस दोन यांनीं भाग ह्मणजे पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात

$$\text{को}\,\text{अ} = \frac{१}{२}\sqrt{१ + \text{भु}\,२\text{अ}} + \frac{१}{२}\sqrt{१ - \text{भु}\,२\text{अ}} \quad \text{----} (७३)$$

$$\text{भु}\,\text{अ} = \frac{१}{२}\sqrt{१ + \text{भु}\,२\text{अ}} - \frac{१}{२}\sqrt{१ - \text{भु}\,२\text{अ}} \quad \text{---} (७४)$$

२७ आतां (६) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें.

छ : घ :: भु अ : भु ब मिश्रणानें व भागाकारानें लिहून.

$$\frac{\text{छ} - \text{घ}}{\text{छ} + \text{घ}} = \frac{\text{भु}\,\text{अ} - \text{भु}\,\text{ब}}{\text{भु}\,\text{अ} + \text{भु}\,\text{ब}}$$ या समीकरणाचा उजव्या बाजूंत (२४) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून.

$$\frac{\text{छ} - \text{घ}}{\text{छ} + \text{घ}} = \frac{\text{स्प}\,\frac{१}{२}(\text{अ} - \text{ब})}{\text{स्प}\,\frac{१}{२}(\text{अ} + \text{ब})} \quad \text{---------} (७५)$$

या सारणी कोष्टकांतील पदें प्रमाणांत लिहून.

$$\text{छ} + \text{घ} : \text{छ} - \text{घ} :: \text{स्प}\,\tfrac{१}{२}(\text{अ} + \text{ब}) : \text{स्प}\,\tfrac{१}{२}(\text{अ} - \text{ब})$$

हें प्रमाण शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांतील त्रिकोणमितीचा (२ सि॰ प्र॰) झालें.

२८ आतां (६) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें पुढील समीकरणें होतात.

$\frac{छ}{म} = \frac{भुअ}{भुक}$ ....(प) $\frac{घ}{म} = \frac{भुब}{भुक}$ .... (ल)

या दोन समीकरणांची बेरीज घेऊन.

$\frac{छ + घ}{म} = \frac{भुअ + भुब}{भुक}$ या समीकरणांत (भुक) या चा ठिकाणीं (४) कलमाचा टिपेप्रमाणें किंमत ठेव.

$\frac{छ + घ}{म} = \frac{भुअ + भुब}{भु (अ + ब)}$ याचा उजव्या बाजूंत (३३ सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत टेव

$\frac{छ + घ}{म} = \frac{को \frac{1}{2} (अ - ब)}{को \frac{1}{2} (अ + ब)}$ या समीकरणांतील प प्रमाणांत लिहून.

को $\frac{1}{2}$ (अ - ब) : को $\frac{1}{2}$ (अ + ब) : : छ + घ : म --(७)

याच रितीनें (प) समीकरणांतून (ल) समीकरण वजा करून.

$\frac{छ - घ}{म} = \frac{भुअ - भुब}{भुक}$ या समीकरणांत (भुक) या चा ठिकाणीं (४) कलमाचा टिपेप्रमाणें किंमत ठेव

$\frac{छ - घ}{म} = \frac{भुअ - भुब}{भु (अ + ब)}$ याचा उजव्या बाजूंत (३५) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून, येणाऱ्या समीकरणाचीं पदें प्रमाणांत लिहिलीं असतां, पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

भु $\frac{1}{2}$ (अ - ब) : भु $\frac{1}{2}$ (अ + ब) : : छ - घ : म ...(८)

२९. आतां जर कोणत्याही त्रिकोणाच्या अ, ब, क कोनांसमोरील बाजू दाखवावयास अनुक्रमें, ध, घ, म्र आणि क कोनापासून समोरील बाजूवर केलेला लंब दाखविण्यास (कड) घेतला नंतर (भू० ३६ किंवा ३७ सि० प्र०) खालीं लिहिलेलें समीकरण उत्पन्न होतें.

$ध^2 = घ^2 + म्र^2 \pm २म्र \cdot अड$ यांत (अड) ची (६) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें किंमत लिहून.

$ध^2 = घ^2 + म्र^2 \pm २ घम्र \cdot कोअ$

आतां या समीकरणांतील (अ) कोन लघु असल्यास (भू० ३७ सि० प्र०) उजव्या बाजूतील तिसऱ्या पदाचें चिन्ह (ऋण) होतें; आणि विशाळ असल्यास (भू० ३६ सि० प्र०) धन होईल, असें भासतें; परंतु विशाळ कोनाची कोभुजज्या (५) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें उणी आहे; तिनें (२घम्र) यास गुणिलें असतां गुणाकार (ऋण) च होतो, ह्मणून (अ) कोन कसाही असो तथापि तिसरें पद (ऋण) च होईल, याज करितां.

$ध^2 = घ^2 + म्र^2 - २ घम्र \cdot कोअ$ . . . . (७८)

या सारणीफोंए कांतीळ पदांस स्थलांतर करून; गुणक सोडीव.

$कोअ = \frac{घ^2 + प्र^2 - ष^2}{२घप्र}$ या समीकरणानें शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांतील त्रिकोणमितीचा (३सि०) चीं उदाहरणें होतात. परंतु हें लाघ्रनमानें गणित करण्याचा उपयोगी नाहीं.

आतां या समीकरणाचे छेद मोडून.

$२घप्र \cdot कोअ = घ^2 + प्र^2 - ष^2$, चिन्हें बदल करून दोनही बाजूंत (२घप्र) मिळविल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$२घप्र - २घप्र \cdot कोअ = ष^2 + २घप्र - घ^2 - प्र^2$

या समीकरणाचा दोनही बाजूंतून साधारण गुणक काढून.

$२घप्र(१ - कोअ) = ष^2 - (घ - प्र)^2 \ldots (न)$

याच प्रमाणें वरील समीकरणाचीं चिन्हें बदल न करितां (२घप्र) मिळवून वर लिहिल्या रितीनें पुढील समीकरण उत्पन्न होतें.

$२घप्र(१ + कोअ) = (घ + प्र)^2 - ष^2 \ldots (म)$

आतां (न) आणि (म) या दोन समीकरणांचा डाव्या बाजूंत (२२), (३१) सारणी कोष्टकांतील किमती ठेवून, उजव्या बाजूंतील पदें गुण्य गुणक रुपानें लिहिलीं असतां खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$४ घम \cdot भु^2 \tfrac{1}{2} अ = (छ - घ + म) \cdot (छ + घ - म)$$

$$४ घम \cdot को^2 \tfrac{1}{2} अ = (छ + घ + म) \cdot (-छ + घ + म)$$

आतां (छ + घ + म) = २ अ घेतले, तर वरील दोन समीकरणांचें रूप पुढें लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$४ घम \cdot भु^2 \tfrac{1}{2} अ = २ (अ - घ) \cdot २ (अ - म)$$

$$४ घम \cdot को^2 \tfrac{1}{2} अ = २ (अ) \cdot २ (अ - छ)$$

या दोन समीकरणांचे गुणक सोडवून वर्गमूळ काढिल्यानें खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$भु \tfrac{1}{2} अ = \sqrt{\frac{(अ - घ) \cdot (अ - म)}{घम}} \cdots\cdots\cdots (७९)$$

$$को \tfrac{1}{2} अ = \sqrt{\frac{अ \cdot (अ - छ)}{घम}} \cdots\cdots\cdots (८०)$$

या दोन सारणी कोष्टकांतील प्रथमास दुसऱ्यानें भागून डाव्या बाजूंत (२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवली म्हणजे पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$स्प \tfrac{1}{2} अ = \sqrt{\frac{(अ - घ) \cdot (अ - म)}{अ \cdot (अ - छ)}} \cdots\cdots (८१)$$

या सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करून पुढील स

मीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब} = \sqrt{\frac{(\text{ज्ञ}-\text{ष})\cdot(\text{ज्ञ}-\text{म})}{\text{ज्ञ}\cdot(\text{ज्ञ}-\text{घ})}}$$

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क} = \sqrt{\frac{(\text{ज्ञ}-\text{ष})\cdot(\text{ज्ञ}-\text{घ})}{\text{ज्ञ}\cdot(\text{ज्ञ}-\text{म})}}$$

हीं दोन समीकरणें व (७९), (८०), (८१) हे सारणीकोष्टक शिक्षामाला पुस्तकांतील त्रिकोणमितीचा (२सि०) चीं लाग्रतमानें उदाहरणें करण्यास उपयोगी आहेत.

आतां यावर सांगितल्या समीकरणांस (८१) सारणीकोष्टकानें भागून पुढील सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब}}{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}} &= \frac{\text{ज्ञ}-\text{ष}}{\text{ज्ञ}-\text{घ}} \\ \frac{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क}}{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}} &= \frac{\text{ज्ञ}-\text{ष}}{\text{ज्ञ}-\text{म}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (८२)$$

याच प्रमाणें वरील दोन समीकरणांस (८१) सारणीकोष्टकानें गुणून खालीं लिहिलेला सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\left.\begin{aligned} \text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब} &= \frac{\text{ज्ञ}-\text{म}}{\text{ज्ञ}} \\ \text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क} &= \frac{\text{ज्ञ}-\text{घ}}{\text{ज्ञ}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (८३)$$

आतां (७०) सारणी कोष्टकाच्या उजव्याबाजून (७९) (८०) सारणी कोष्टकांतील किमती ठेविल्या असतां पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

भुअ = $\frac{2}{\text{घम}}\sqrt{\text{ज}\cdot(\text{ज}-\text{ल})\cdot(\text{ज}-\text{य})\cdot(\text{ज}-\text{म})}$ ..(८४)

उदाहरणें.

प्रथम. दोन किल्ले समुद्रांत किनाऱ्याशीं समरेषेंत आहेत त्यांजमधील अंतर ५०० यार्ड व त्या अंतराचा मध्यावरच एक निशाण खडकावर उभें केलेलें आहे; इतके नकाशावरून माहित आहे. आतां त्या किल्यांचा बाजू कडील भुमीचा एक सोंडा समुद्रांत गेलेला आहे. त्याजवर त्या दोन्ही किल्यांस गोळा लागू होण्या सारिखा मोर्चा करणें आहे. परंतु त्या स्थलापासून एक एक किल्ला किती लांब आहे हें कळावें ह्मणून प्रत्येक किल्ला व निशाण लक्षून दोन कोन मापिले, ते ३० आणि २० अंश झाले. तेव्हां त्या स्थलापासून प्रत्येक किल्याची लांबी किती?

उत्तर { प्रथम किल्ला ४४५.८३ ; दुसरा किल्ला ६५१.१६ } यार्ड.

दुसरें. कोणा एका पलटणीचें निशाण शत्रूनें जाणा-

ळून नेऊन समुद्रांत एक सुदृढ किल्ला होता, त्याच्या बुरजा च्या परिघावर भुमीकडील अंगीं उभें करून ठेविलें. नंतर तो बुरूज फोडून निशाण आणावें, असें त्या पलटणीच्या मनांत आलें. परंतु तोफांचे गोळे लागू होतील, किंवा न्हाहीं; हा विचार ठरवावयाकरितां जेथें मोरचा करणार त्या स्थळापासून बुरजापर्यंत लांबी आणि त्या बुरजाची उंची समजावी; ह्मणून मोरचा करणार त्या स्थळापासून निशाणाच्या पाया (बुंध) आणि शिखर लक्षून कोन मापिला, तो १° दहा अंश झाला; नंतर तेथून २०० यार्ड मागें येऊन त्याच लक्ष्यांशीं कोन मापिला, तो १° दहा अंश झाला. आणि त्या निशाणाची उंची १२ फुटी माहीत आहे. यावरून मोरचा करणार त्या स्थळापासून सरळ रेषेनें बुरुजापर्यंत लांबी व त्या बुरजाची उंची किती आहे तें सांग?

उत्तर { मोरचापासून लांबी ३४ · ०३ / बुरजाची उंची २८ · ५५ } फुट.

दुसरीं याप्रमाणें कित्येक चमत्कारिक उदाहरणें लिहावयाचीं होतीं; परंतु विस्तारभयास्तव न लिहितां पुढें दुसरा विषय आरंभितों.

प्रथम प्रकरण समाप्त.

प्रकरण दुसरें.

गोलीय त्रिकोणमिति

भाग पहिला.

कलम ३०

व्याख्या.

१ गोल तोच होय, कीं जाची मर्यादा वांकडी पातळी, त्या गोलांतील एका बिंदूपासून सर्वत्र सारख्या अंतरानें आहे; आणि त्या, आंतील बिंदूस गोलाचा मध्य ह्मणतात. मनांत आणा कीं, अर्ध वर्तुळ व्यासा भोंवतें फिरविल्यापासून गोल उत्पन्न होतो.

२ गोलाचा आंस तीच सरळ रेघ आहे, कीं जिचावर अर्ध वर्तुळ फिरतें, आणि गोलाचा मध्य तोच आहे, कीं जो अर्ध वर्तुळाचा मध्य ह्मणजे, गोल आणि अर्ध वर्तुळ यांचा मध्य एकच आहे, जापासून त्याची मर्यादा वांकडी पातळी सर्वत्र बराबर अंतरानें आहे

३ गोलाचा एकीकडील मर्यादेपासून गोलाचा अंतर मध्यं बिंदु छेदून पार दुसऱ्ये कडील मर्यादे पर्यंत जाणारी जी सरळ रेषा तिला गोलाचा व्यास ह्मणतात. आणि गोलाचा मध्य बिंदूपासून गोल पृष्ट पर्यंत जी सरळ रेषा तिला गोलाचा

चीं त्रिज्या ह्मणतात.

४ विषुववृत्त, क्रांतिवृत्त इत्यादि जीं गोलाचे दोन सम-भाग करितात, ह्मणजे त्यांचा आणि गोलाचा मध्य बिंदु एकच आहे, त्यांस महद्वृत्तें ह्मणतात. आणि अयनवृत्त, ध्रुवं वृत्त इंत्यादि जीं गोलाचे दोन विषम भाग करितात, ह्मणंजे त्यांचा मध्य बिंदु गोलाचा मध्य बिंदू वर नाहीं, अशीं जीं वृत्तें त्यांस लघुवृत्तें ह्मणतात.

५ महद्वृत्ताचा कींसांतील कोणत्याही एकं बिंदू पासून नव्वद अंशांवर जो बिंदु त्यास त्या वृत्ताचा ध्रुव ह्मणतात.

६ ज्याचा तीनही बाजू गोलाचा महद्वृत्तांचे कींस आहेत, असा जो गोलाचा सपाटिचा भाग, त्यास गोलीय त्रिकोण ह्मणतात. व मर्यादा कींसास त्रिकोणाचा बाजू ह्मणतात. आणि कोन तोच होय कीं, त्या कोनाचा दोहों कडील बाजूंचा झोंकानें झाला आहे. पुढें जेथें अमुकच त्रिकोण सांगितला नसेल, तेथें गोलीय त्रिकोण समजावा.

७ कोणत्याही गोलीय त्रिकोणांत एक कोन ध्रुव मानून त्या कोनासमोर नव्वद अंशांवर जर एक कींस केला; आणि ज्या बाजूंनीं तो कोन होतो, त्या बाजू केले त्या कींसास मिळतें अशा ह्मणजे नव्वद अंश होत पर्यंत वाढविल्यात

र त्यां मधील कोंसांत जितके अंश असतील, त्यांनीं समोरील कोन मापला जातो; कारण कोणता ही कोन, ध्रुव मानून जर कोंस केला, तर तो महद्वृत्ताचा होतो. आतां मनांत आणकीं, केले त्या महद्वृत्तानेंच गोलाचे दोन समभाग केले, आणि त्या वृत्ताचा ध्रुव हातानें चेपून पातळी बराबर सपाट केला, तर त्याची आकृती दिग्दर्शन पुस्तकांतील खगोलाचा नकाशाचा एका गोलार्धा सारिखी सपाट वर्तुळ होऊन, त्याचा मध्य बिंदु पूर्वोक्त वृत्ताचा ध्रुव होईल, याजकरितां ध्रुवस्थलीं ह्मणजे वर्तुळ मध्यावर जे कोन होतात, त्यांचें माप शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांत (हट्टनकृत भूमितीचा अठ्ठावंनाव्या व्याख्ये प्रमाणे) समोरील कोंस आहे. या आणि भूमितीचा (५८) व्या, व्याख्येंत सर्वस्वी सादृश्य आहे

८ गोल, सरळ पातळीनें कापिला असतां, त्याचें छिन्न (भू० ११६. सि० प्र०) वर्तुळ होईल.

यांतील बहुतेक व्याख्या वगैरे शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांत व सिद्ध पदार्थ विज्ञान, आदिकरून कित्येक मराठी ग्रंथांत आहेत; परंतु आपणास ज्या सूत्रांची गरज लागणार तीं सुचनार्थ एथें लिहिलीं आहेत.

प्रत्यक्ष प्रमाणें

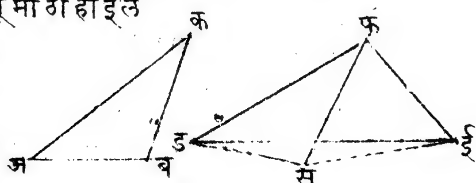
१ महद्वृत्तें परस्परांस दुभागितात. म्हणजे एकमेकांस (१८०°) अंशांवर दोन ठिकाणीं छेदितात.

२ गोलीय त्रिकोणाचा बाजू महद्वृत्तांचे कौंस असतात; कारण गोलीय त्रिकोणमितीचा उपयोग मुख्यत्वें करून ज्योतिष गणिताला फार आहे, आणि आकाशांतील कोणत्याही त्रिकोणाचा बाजूंचा कौंसांचा मध्य भूमध्य असतो, म्हणून गोलीय त्रिकोणाचा बाजू सर्वदा महद्वृत्ताचेच कौंस म्हटले पाहिजेत.

प्रथम सिद्धांत.

कोणत्याही दोन सरळरेघ त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचा दोन बाजूं बरोबर असून एकाचा अंतर कोनापेक्षां दुसऱ्याचा अंतरकोन मोठा असेल तर त्या हान अंतर कोनासमोरील बाजूपेक्षां मोठ्या अंतरकोनासमोरील बाजू मोठी होईल

अबक आणि इईफ या दोन त्रिकोणां-



त एकाचा अक, बक बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचा डफ, ईफ बाजूं बरोबर असून क अंतरकोनापेक्षां फ अंतरकोन मोठा असेल तर अब बाजूहून डई बाजू मोठी होईल.

आतां ∠क बरोबर कोन करणारी फ बिंदूपासून रेषा कर; आणि बक चा बराबर फस घे तरती डईफ त्रिकोणांत किंवा डई बाजूवर अथवा डफई △ बाहेर कोठें ही आली, तथापि सई, सड सांध; तेव्हां (भू० १ सि० प्र०) अबक △ = डफस △ आणि सईफ △ समद्विबाजू होईल, याजकरितां ∠फईस = ∠ईसफ आणि ∠डईस, ∠फईस कोनाचा तुकडा तो ∠फईस किंवा त्याचा बराबरीचा ∠ईसफ हून ल्हान आहे; ह्मणून डईस त्रिकोणांत डईस कोनापेक्षां ईसड कोन मोठा याजकरितां (भू० १९ सि० प्र०) सड किंवा तिचा बरोबरीची अब बाजूहून डई बाजू मोठी आहे हें सिद्ध

दुसरा सिद्धांत.

जेव्हां दोन सरळरेघ त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजूं बराबर असून एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्याचा तिसऱ्या बाजूहून मोठी असेल तर ल्हान बाजूसमोरील कोनापेक्षां मोठ्या बाजूसमोरील कोन मोठा होईल,

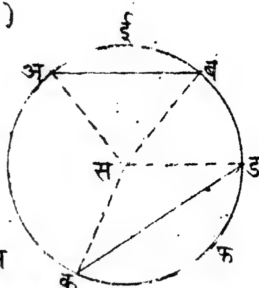
अबक आणि डईफ या दोन त्रिकोणांत एका

च्या अक, बक बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याच्या डफ, ईफ बाजूं बरोबर असून अब बाजूहून डई बाजू मोठी असेल, तर ∠क पेक्षां ∠फ मोठा होईल.

आतां मनांत आण कीं ∠क = ∠फ आहे तर (भू० १ सि० प०) अब = ईड व्हावी, परंतु अब बाजू पेक्षां डई बाजू प्रतिज्ञेनेंच मोठी असें सांगितलें आहे; म्हणून ∠क = ∠फ होणार नाहीं. आणि जर ∠क, ∠फ हून मोठा असेल, तर (वरील सिद्धांताप्रमाणें) अब बाजू डई बाजूहून मोठी असावी; परंतु ती ही प्रतिज्ञेंत लहानेंच सांगितली आहे, याजकरितां ∠क, ∠फ हून मोठा नाहीं तर निश्चय कळून येतें कीं क कोनाहून फ कोन मोठा आहे हें सिद्ध.

तिसरा सिद्धांत.

वर्तुळांतील अर्ध वर्तुळ पर्यंत मोठ्या ज्यावर मोठा कौंस आणि लहान ज्यावर लहान कौंस आहे.



अईबडफक वर्तुळांत अब ज्याहून कड ज्या मोठी असेल तर अईब कौंसाहून कफड कौंस मोठा होईल.

ह्मणून स वर्तुळमध्यापासून सअ, सब, सक, सड त्रिज्या कर ह्मणजे अबस आणि कडस हे दोन त्रिकोण होतील.

आतां अबस, कडस या दोन त्रिकोणांत एकाचा दोन बाजू दुसऱ्याचा दोन बाजूं बराबर असून एकाची तिसरी बाजू दुसऱ्यांचा तिसऱ्या बाजूहून मोठी आहे; ह्मणून (वरील २सि० प्र०) असब कोनापेक्षां कसड कोन मोठा आहे. याजकरितां (भू० ५८ व्या० प्र०) त्याचा मापक जो कफड कौंस तो अईब कौंसाहून मोठा आहे हें सिद्ध.

याचा उलट. जेव्हां कफड कौंस अईब कौंसाहून मोठा असेल; तेव्हां त्याची कड ज्या अईब कौंसाचा अब ज्याहून मोठी होईल.

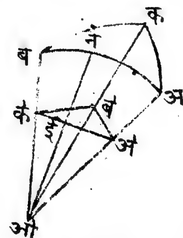
आतां कफड कौंस अईब कौंसाहून मोठा आहे; याजकरितां (भू० ५८ व्या० प्र०) त्यानें मापला जातो जो कसड कोन तो अईब कौंसानें मापणाऱ्या असब कोनाहून मो-

ठा आहे; ह्मणून **कसड**, **असब** या दोन त्रिकोणांत एकाच्या दोन बाजू दुसऱ्याच्या दोन बाजूंबरोबर असून एकाचा अंतर कोन दुसऱ्याच्या अंतरकोनाहून मोठा आहे, याजकरितां (वरील १ सि० प्र०) त्याचीजी **कड** ज्या ती **अब** ज्याहून मोठी आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. यापासून सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही कोंसांचा त्रिज्यांची लांबी बरोबर असल्यास मोठ्या ज्यावर मोठा व लहान ज्यावर लहान कोंस आणि मोठ्या कोंसाची मोठी व लहान कोंसाची लहान ज्या असते.

चौथा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूहून अधिक आहे.+



अबक गोलीय त्रिकोण असेल तर त्याचा कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूहून अधिक होईल, ह्मणजे **अक** आणि **बक** या दोन बाजूंची

+ भरींवांचा आकृति कागदावर यथास्थित दाखवितां येत नाहींत; तथापि बहुतेक आकृति सुबोध होण्यासारिख्या काढल्या आहेत. किल्येक

बेरीज अब बाजूहूनं अधिक होईल.

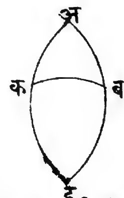
आतां ओ गोलमध्यबिंदूपासून अओ, कओ, बओ त्रिज्या कर, व अओ, बओ यांस सांधणारी कशीही अक सरळ रेषा कर. आणि कओब कोनाबराबर अब कोंसावर कोनकरणारी ओन सरळरेषा कर ह्मणजे ती अक रेघेस कोठेंही ई स्थळीं मिळेल; तेव्हां बक कोंस बन कोंसाबराबर किंवा कओब कोन बओन कोनाबराबर होईल. आतां ओई = ओब अंतर कओ त्रिज्येवर घेऊन ई. ब व अब सरळ रेषेनें सांध. ह्मणजे अकब हा सरळ रेघ त्रिकोण होईल यांत (भू० १० सि० प्र०) कब आणि अब या दोन बाजूंची बेरीज अक बाजूहून अधिक आहे; परंतु बक = कई आहे, कारण बओक आणि कओई हे कोन परस्पर बराबर केले आहेत; व ईओ बाजू बराबर बओ बाजू घेतली आहे. आणि कओ बाजू दोन ही त्रिकोणांस साधारण याज करितां (भू० ४ सि० प्र०) बक बाजू कई बाजू बराबर आहे

भरींव आकृति कागदावर काढिल्या ह्मणजे फारच दुर्बोध होतात. परंतु हा ग्रंथ बालबोध व्हावा याजकरितां या पुस्तकांत तशा आकृतींची संख्या जितकी कमी होईल तितकी केली आहे; आणि विषयही फारच सुबोध केला आहे. असें असून ही जी आकृति दुर्बोध वाटेल ती काष्टादिकांची करावी. ह्मणजे समजून पडण्यास कठीण पडणार नाहीं.

ह्मणून बाकी राहिली जी **अब** बाजूती **अई** बाजूहून मोठी आहे; परंतु **अओब** आणि **अओई** या दोन त्रिकोणांत **अओ** बाजू दोहींस साधारण आहे, आणि पूर्वी सांगित ल्या प्रमाणें **ओई**=**ओब** असून **अब** बाजू **अई** बाजूहून मोठी आहे. ह्मणून (वरील २ सि० प्र०) तिचा समोरचा **अओब** कोन **अओई** कोनाहून मोठा ह्मणजे (भू० ५८ व्या० प्र०) त्याचा मापक जो **अक** कोंस तो **अन** कोंसाहून मोठा आहे; याजकरितां **अक** आणि **बक** यांची बेरीज **अन** आणि **बन** यांचा बेरजेहून ह्मणजे **अब** हून मोठी आहे हें सिद्ध.

पांचवा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा तीन बाजूंची बेरीज ३६०° अंशांहून उणी आहे.



अबक गोलीय त्रिकोण असेल, तर त्याचा **अब**, **अक**, **बक** या तीन बाजूंची बेरीज ३६०° अंशांहून कमी होईल.

आतां **अक** आणि **अब** या दोन बाजू वाढीव अशा कीं **ड** स्थळावर एकमेकांस छेदितील तर **अकड** आणि **अबड** या दोन कोंसांची बेरीज (वरी-

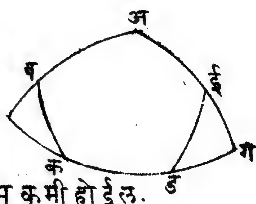
ल प्रत्यक्ष प्रमाणांत) सांगितल्या प्रमाणें ३६०° आहे; आणि (वरील ४ सि० प्र०) **कड** आणि **बड** यांची बेरीज **बक** हून अधिक आहे, व पूर्वी सांगितलें कीं **अक** आणि **अब** कोंसां सज्जे क्हां **कड** वँ **बड** कोंस मिळवावे, तेव्हां ३६०° होतील. परंतु त्यांचा बेरजे पेक्षां कमी जो **बक** कोंस तो मिळविला तर **अक + अब + बक** ही बेरीज ३६०° हून कमीच होईल. आणि हे तीन ही कोंस गोलीय त्रिकोणाचा बाजू आहेत; या कारितां तीन ही बाजूंची बेरीज ३६०° हून कमी आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. यावरून सिद्ध होतें कीं, गोलीय त्रिकोणाची कोणती ही बाजू १८० अंशांहून कमी असत्ये.

सहावा सिद्धांत.

कोणत्या ही गोलीय पंचकोनाचा पांच बाजूंची बेरीज ३६० अंशांहून उणी आहे.

कोणता ही **अबकडई** गोलीय पंचकोन असेल तर त्याचा **अब, बक, कड, डई, ईअ** या पांच बाजूंची बेरीज ३६०° अंशांहून कमी होईल.



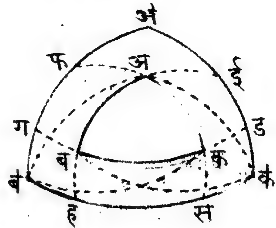
आतां **अ** कोनासमोरील **कड** बाजू वाढीव अशी कीं -

अब, अई वाढ विल्या बाजूंस फ आणि ग स्थलीं मिळेल; ते- व्हां अफग त्रिकोण झाला, त्याचा तीन बाजूंची ह्मणजे अब+ बफ+फक+कड+डग+गई+ईअ हीं बेरीज (वरील ५ सि०प्र०) ३६० अंशांहून कमी आहे. ह्मणून पंचकोनाकृत चा अब, बक, कड, डई, ईअ या बाजूंची बेरीज ३६०° हून कमीच होईल. कारण त्रिकोणाचा बाजूंचा बेरजे पेक्षां पंचको नाचा बाजूंचा बेरजेंत बफ, फक, डग, गई या बाजूंनसून दुस ऱ्या बक, डई या दोन बाजू आहेत. परंतु त्या बफ, फक, डग, गई यांचा बेरजेहून (वरील ४ सि०प्र०) लहान आहेत याजकरितां त्रिकोणाचा बेरजेंतून मोठ्या बाजू काढून त्यांचा बदली लहान बाजू मिळविल्या असतां बेरीज पूर्व बेरजे पे- क्षां लहानच होईल. आणि पूर्वीची बेरीज ३६० अंशांहून कमी आहे, याजकरितां पंचकोनाचा पांच बाजूंची बेरीज ३६० अं शांहून कमी आहे हें सिद्ध.

सातवा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचे तीन कोन ध्रुव मानून कोंस केले असतां त्यांपासून जो दुसरा गोलीय त्रिकोण होतो त्याचे जे तीन कोन ते प्रथम गोलीय त्रिकोणाचा तीन हीं बा

जूंचे ध्रुव आणि सप्लुमेंट होतील. तसेंच त्याचा जा तीन बाजू त्या प्रथम त्रिकोणाचा तीनही कोनांचे सप्लुमेंट होतील.



जर अबक गोलीय त्रिकोण असेल तर त्याचे अ, ब, क कोन ध्रुव मानून बक, अक, अब कोंस केले त्यास त्यापासून अबक दुसरा त्रिकोण होतो, त्याचे अ अ, ब, क कोन ते प्रथम त्रिकोणाचा बक अक, अब बाजूंचे ध्रुव आणि सप्लुमेंट होतील. तसेंच त्याचा जा बक, अक, अब. बाजू त्या प्रथम त्रिकोणाचा अ, ब, क कोनांचे सप्लुमेंट होतील.

आतां बक बाजू अब आणि अक या कोंसांस मिळेल अशी ग आणि ड बिंदू पर्यंत वाढीव याच प्रमाणें अक आणि अब बाहेरील त्रिकोणाचा बाजूंस मिळत अशा फ, स व ह, ई बिंदू पर्यंत वाढीव आणि अब, कब तसेंच बक अक इत्यादि सांध; तर (वरील ५ व्या० प्र०) अ या कोन बिंदू पासून बक कोंसांतील कोणत्याही बिंदू पर्यंत अंतर ९० अंश आहे; याच प्रमाणें क कोन बिंदू पासून अब कोंसांतील कोणत्याही बिंदू पर्यंत अंतर ९० अंश आहे; ह्मणून ब

हा कोन अक कोंसाचा ध्रुव व त्याच प्रमाणें ब कोन बिंदू पासून कअ कोंसांतील सर्व बिंदू पर्यंत अंतर ९० अंश आणि (वर सांगितल्या प्रमाणें) अ कोना पासून बक कोंस पर्यंत अंतर ९० अंश आहे, याज करितां क कोन बअ कोंसाचा ध्रुव आहे; याच रितीनें अ हा कोन बक कोंसाचा ध्रुव आहे हें सिद्ध.

पुनः (वरील ७ व्या० प्र०) अ कोनाचें माप गबकड कोंस आहे; याज करितां (वर सांगितल्या प्रमाणें)

गब + बक = ९०°

तसेंच; कड + बक = ९०°

बेरीज घेऊन, (गब + बक + कड) + बक = १८०° } आतां गब + बक + कड यांचा ठिकाणीं गबकड कोंस किंवा (वरील ७ व्या० प्र०) यानें माप तो जो अ कोन तो ठेविला तर तो बक बाजूचा सप्लिमेंट आहे, व या प्रमाणेंच अक, अब बाजूंचे ब आणि क हे कोन सप्लिमेंट होतात हें सिद्ध.

याच रितीनें अ कोनाचें माप (वरील ७ व्या० प्र०) हस कोंस आहे; आणि (वर सांगितल्या प्रमाणें)

बह + हस = ९०°

याच प्रमाणें, सक + हस = ९०°

(ब़ह + हस + सक) + हस = १८०° } या बेरजेंतील हस कोंसाच्या ठिकाणीं (वरील ७ व्याख्ये प्रमाणें) त्यानें मापला जातो जो अ कोन तो ठेविला आणि बह + हस + सक याच्या ठिकाणीं बह सक कोंस ठेविला तर तो अ कोनाचा सप्लिमेंट आहे; याच प्रमाणें ब, क कोनांचे अई डक आणि बगफअ हे कोंस सप्लिमेंट होतात हें सिद्ध.

आठवा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाच्या तीन कोनांचीं बेरीज दोन काटकोनाहून अधिक आणि सहा काटकोनांहून कमी होईल.

कोणताही अबक किंवा अ'ब'क' गोलीय त्रिकोण असेल तर त्याचा अ, ब, क अथवा अ', ब', क' कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून अधिक आणि सहा काटकोनांहून कमी होईल.

आतां (वरच्या सिद्धांताच्या आकृतीवर दृष्टि ठेव) अबक आणि अ'ब'क' हे त्रिकोण परस्परांचे सप्लिमेंटरी* आहेत. तेव्हां

---

* जा त्रिकोणाचे तीनही कोन अनुक्रमें समोरील बाजूंचे ध्रुव आहेत; म्हणजे ज्याचे तीनही कोन अनुक्रमें समोरील बाजूंस मिळविले असतां दोन दोन काटकोन होतात, त्यास किंवा दोन त्रिकोणांत एकाचे तीनही कोन अथवा बाजू अनुक्रमें दुसऱ्याचा तीनही बाजूंस किंवा कोनांस मिळविल्या असतां दोन दोन काटकोन होतात; त्या त्रिकोणास सप्लिमेंटरी अथवा ध्रुवक त्रिकोण असें म्हणतात.

(काटकोन)   (काटकोन)

बक+अ = २ }   { बक+अ = २
अक+ब = २ } याचरितीनें { अक+ब = २
अब+क = २ }   { अब+क = २

बे० घे० {बक+अक+अब+अ+ब+क=६} {बक+अक+अब+अ+ब+क=६

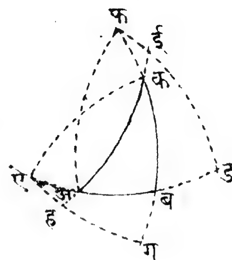
स्थ० {अ+ब+क=६-(बक+अक+अब)} {अ+ब+क=६-(बक+अक+अब

परंतु बक, अक, अब आणि बक, अक, अब या त्रिकोणाच्या बाजू आहेत; ह्मणून (वरील ५ सि० प्र०) त्यांची बेरीज ३६० अंशाहून ह्मणजे चार काटकोनांहून कमी आहे; ती वजा केली असतां जी तीन कोनांची बेरीज ती दोन काटकोनांहून अधिक आहे; याच रितीनें वजा द्यावयाची जी त्रिकोणाच्या बाजूंची बेरीज ती कितीही लहान असली तरी बाकी सहा काटकोनांहून कमी राहील, याजकरितां कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज दोन काटकोनांहून अधिक आणि सहा काटकोनांहून कमी आहे हें सिद्ध.

नववा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय काटकोन त्रिकोणाच्या तीन बाजू दोहोंकडून नवद नवद अंशपर्यंत वाढविल्या आणि त्यांचीं अ

येसांधिलीं तर बाहेरील कौंस लघुकोनांचे कांप्लुमेंट होतील.



कोंणताही अबक काटकोन त्रिकोण असेल जांत ब कोन काटकोन आहे तर त्याचा अब, अक आणि बक या बाजू नव्वद अंश पुरे होत अशा ड, ई, फ पर्यंत वाढवून फ, ई, ड आणि अ, फ हे बिंदु कौंस रूप बाजूंनीं सांधिले तर फड कौंस कअब कोनाचा आणि अब कौंस डफब कोनाचा कांप्लुमेंट होईल.

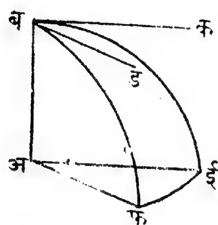
आतां डई कौंस कअब कोनाचें माप आहे, आणि बक बाजू नव्वद अंश होईल, अशी फ पर्यंत वाढविली आहे, याजकरितां फ स्थलापासून अबड कौंसांतील कोणत्याही बिंदू पर्यंत अंतर नव्वद अंश आहे. ह्मणून डई कौंसाचा ह्मणजे (वरील ७ व्यां॰ प्र॰) त्यानें मापलाजातो जो कअब कोन त्याचा फई कौंस कांप्लुमेंट आहे, याच प्रमाणें डफब कोनाचा अब कौंस कांप्लुमेंट आहे हें सिद्ध.

याच रितीनें दाखविलें जातें कीं हए कौंस अकब कोनाचा आणि बक कौंस बएग कोनाचा कांप्लुमेंट आहे हें सिद्ध.

दहावा सिद्धांत.

दोन महद्वृत्तें परस्परांस छेदितील तर छेदनस्थलीं दोन कौंसांनीं जो कोन होतो, तो दोन वर्तुळांस त्याच स्थलीं स्पर्श रेषा केल्या त्यांमधील कोना बराबर आहे.

कोणते हीं बई आणि बफ महद्वृत्तांचे कौंस ब स्थलीं परस्परांस छेदून ईबफ कोन करितात. तो त्याच महद्वृत्तांचा छेदनस्थलींचा बक आणि बड स्पर्श रेषांतील कबड कोना बराबर आहे



ह्मणून अ गोलमध्यापासून बकशीं अई आणि बड शीं अफ समांतर रेषा करून ईफ, अब सांधतर अब त्रिज्या (भू० ४७ सि०प्र०) बक आणि बड रेषांवर लंब होईल. व त्यांशीं अई आणि अफ समांतर आहेत, याजकरितां (भू०१२सि०कु०प्र०) त्यांवर ही लंब होईल.

आतां ईअब आणि फअब कोन काटकोन आहेत; याजकरितां (भू०५८व्या०प्र०) बई आणि बफ कौंस नवद अंश आहेत. ह्मणून (वरील ७व्या०प्र०) ईबफ कोनाचे माप फई कौंस आहे, आणि (भू०५८व्या०प्र०) ईअफ

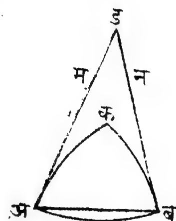
सरळ रेघ कोनाचें माप तोच कोंस आहे; म्हणून ∠ईबफ = ∠ईअफ आहे परंतु (भू० १०४ सि० प्र०) ∠ईअफ = ∠कबड आहे. याज करितां (भू० प्र० प्र० प्र०) ∠ईबफ = ∠कबड आहे हें सिद्ध.

कुरलरी. यावरून (भू० १०४ सि० सहायानें) सिद्ध होतें कीं, गोलावरील दोन महद्वृत्तें परस्परांस छेदून पुढें वाढविलीं; तर त्यांतील छेदन स्थलांचा कोन त्याच स्थलां पासून त्या वृत्तांस मिळे पर्यंत ज्या, ज्या करा त्या त्यांतील कोना बराबर आहे.

अकरावा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा दोन कोन स्थलीं बाजूंस स्पर्श रेषा केल्या, तर त्या परस्परांस मिळतात.

अबक गोलीय त्रिकोणाचा अ, ब कोन स्थलीं अक आणि बक बाजूंस अम आणि बन स्पर्श रेषा केल्या, तर त्या ड स्थलीं परस्परांस मिळतील.



आतां अब ज्या कर तेव्हां अक आणि बक कोंसांचा

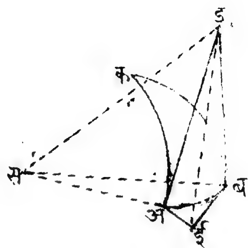
स्पर्श रेषा आणि अब कोंसाची ज्या यांपासून जे बअम आणि अबन कोन होतात ते लघुकोन आहेत. कारण अक कोंसाची अम आणि बक कोंसाची बन स्पर्श रेषा आहे, याजकरितां वर्तुळ मध्यांतून अ आणि ब स्पर्शस्थळीं जाणारी रेषा (भू॰ ४७ सि॰ प्र॰) काट कोन करील, परंतु अशी वर्तुळमध्यापासून अब कोंसाचा अ आणि ब दोन हीं शेवटां समिळणारी ज्या अब कोंस १८० अंश असल्यावांचून होणार नाहीं. आतां (वरील ४ सि॰ प्र॰) अक+बक> अब हून मोठी आहे, त्यांत अब = १८०° असल्यास (अब+बक+अक) यांची बेरीज ३६०° हून अधिक होइल. परंतु (वरील ६ सि॰ प्र॰) कोणत्याही त्रिकोणाचा तीन बाजूंची बेरीज ३६० अंशांहून कमी आहे; याजकरितां (वरील ५ सि॰ कु॰ प्र॰) गोलीय त्रिकोणाची कोणती ही बाजू १८०° हून कमी असते; ह्मणून मअब आणि नबअ हे लघुकोन आहेत. याजकरितां अम, बन शीं समांतर नाहीं, आणि समांतर नाहीं ह्मणूनच एकमेकींस, ड स्थळीं मिळतात हें सिद्ध.

बारावा सिद्धांत.

गोलीय समद्विबाजू त्रिकोणांत पायाकडील कोन ब-

राबर आहेत. अथवा जर कोणत्याही गोलीय त्रिकोणांत दोन बाजू बराबर असतील तर त्यांचा समोरा समोरचे कोन बराबर होतील.

जर अबक त्रिकोणांत अक आणि बक या दोन बाजू बराबर असतील तर ब कोन अ कोना बराबर होईल.



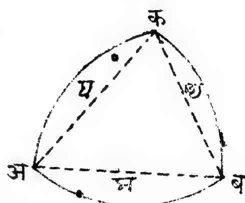
म्हणून अ आणि ब कोनस्थळीं अक, बक, अब या बाजूंस स्पर्श रेषा कर. तर त्या (वरील ११ सि० प्र०) कांटें ही ड आणि ई स्थळीं मिळतील.

आतां स गोल मध्यापासून सअ, सब त्रिज्या कर. आणि सड सांधतेव्हां सबड आणि सअड हे दोन त्रिकोण झाले. यांत सब आणि सअ त्रिज्या बराबर आहेत. व, सड बाजू दोहींस साधारण आणि (भू० ४७ सि० प्र०) सअड काट कोन सबड काटकोना बराबर या जकरितां (भू० ३४ सि २ कु० प्र०) अड = बड बाजू आहे. आणि (भू० ६१ सि २ कु० प्र०) अई = बई आहे; आतां अडई, बडई या दोन त्रिकोणांत वर सिद्ध केल्या प्रमाणें अड = बड व

अई=बई आणि डई बाजू दोहांस साधारण याजकरितां (भू० ५ सि० प्र०) हे दोन त्रिकोण एकरूप ह्मणजे <डअई= <डबई आहे. परंतु (वरील १० सि० प्र०) <डअई =<कअब याच रितीनें <डबई =<कबअ आहे. यांतें <डअई= <डबई आहे. याजकरितां <कअब =<कबअ आहे हें सिद्ध.

तेरावा सिद्धांत.

कोणत्याही गोलीय त्रिकोणांत मोठ्या बाजू समोर मोठा आणि लहान बाजू समोर लहान कोन आहे. तसेंच मोठ्या कोना समोर मोठी व लहान कोना समोर लहान बाजू आहे.



अबक गोलीय त्रिकोणांत अब बाजू अक, बक बाजूहून प्रत्येकीं मोठी असेल तर अब बाजू समोरचा <क, अक, बक यांचा समोरील <ब, <अ कोनाहून मोठा होईल.

ह्मणून अजब, अघक, बछक ज्या कर. आतां

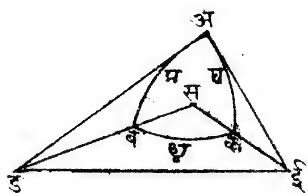
अब बाजू अक, बक बाजूंहून मोठी आहे. याजकरितां (वरील २ सि० कु० प्र०) त्याची जी अप्र ब ज्याती अघक अथवा बछक ज्याहून मोठी आहे. ह्मणून (भू० १ सि० प्र०) प्रछघ सरळरेघ त्रिकोणांत घकछ कोन ∠ घअप्र किंवा ∠ छबप्र याहून मोठा आहे; आणि हे दोन ही कोन (वरील ७ व्या० प्र०) व (वरील १० सि० कु० प्र०) विचार करून पहातां अनुक्रमें अकब, कअब कबअ कोनां बरोबर आहेत. याजकरितां घकछ अथवा त्याच्या बरोबरीचा जो अकब कोन तो ∠ घअप्र, ∠ छबप्र किंवा त्याच्या बरोबरीचे जे कअब, कबअ या कोनांहून मोठा आहे हें सिद्ध.

याच्या उलट. जेव्हां अकब कोन कअब, कबअ कोनांहून मोठा असेल तर त्याच्या समोरची अब बाजू अक किंवा बक बाजूहून मोठी होईल. आतां प्र, घ, छ ज्याकर, ह्मणजे प्रघछ सरळरेघ त्रिकोण होईल. त्याचा घकछ कोन पूर्वी मागितल्या प्रमाणें अकब कोना बरोबर होईल. ह्मणून (भू० १ सि० प्र०) त्याच्या समोरची जी प्र बाजू ती घ किंवा छ बाजूहून मोठी होईल. आणि घ अथवा छ याहून प्र मोठी आहे. याजकरितांच (वरील २ सि० कु० प्र०) अब बाजू अक किंवा बक बाजूहून मोठी आहे हें सिद्ध.

भाग दुसरा.

गोलीय त्रिकोणमितींतील उपयोगी सारणी कोष्टक.

३१ गोलीय त्रिकोणमितींतील आदि कारण सारणी कोष्टक सिद्ध करण्या करितां या आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें अबक कोणता* ही एक गोलीय त्रिकोण असेल; जा गोलाचा स मध्यबिंदु आहे. आतां अ, ब, क कोनां समोरील बाजूंची लांबी दाखवायास छ, घ, म हीं अक्षरें धर; आणि अस त्रिज्येचा अ शेवटावर लंब करून ते वाढीव, असें कीं सब, सक वाढविलें त्या त्रिज्यांस डु आणि ई स्थळीं मिळतील. व ते (भू० ४६ सि० प्र०) अब, अक बाजूंचा स्पर्श रेषा ही होतील; नंतर डुई सांध.



आतां गोलाचा त्रिज्येची लांबी दाखवावयास (J) घेत

* एथें लघुकोन त्रिकोण घेऊन पुढील सारणी कोष्टक सिद्ध केले आहेत. परंतु ते लघु आदि करून सर्व त्रिकोणां वर लागू आहेत. कारण विशाळ कोनासमोर विशाळ म्हणजे नव्वद अंशांहून मोठी किंवा लघु कोनासमोर लघु म्हणजे नव्वद अंशांहून लहान बाजू असते असें नाहीं म्हणून सिद्ध झालेले सारणी कोष्टक साधारण आहेत. याचा सत्यता वरील आकृतींत अ, ब, क कोन पर्यायानें कसे ही घेन त्यास कळेल.

ली असतां स स्थानी जे कोन होतात. ते खालीं लिहिल्या प्रमाणें अक्षरांनीं लिहितां येतील.

$\angle$बसक = $\frac{थ}{ज}$, $\angle$असक = $\frac{घ}{ज}$, $\angle$असब = $\frac{म}{ज}$, यांत (ज) बराबर (१) धरिला असतां; $\angle$बसक = थ, $\angle$असक = घ, $\angle$असंब = म, होईल. आणि त्रिज्या एक आहे, याजकरितां अड = स्पंम आणि अई = स्प घ व सड = छेम सई = छेघ होईल.

आतां डअई त्रिकोणांत (७८) सारणी कोष्टकाची योजना करून खालीं लिहिल्या प्रमाणं होतें.

$डई^{२} = अई^{२} + अड^{२} - २\, अई \cdot अड \cdot को\angle डअई$
याच प्रमाणें डसई त्रिकोणांत } यांत वर
$डई^{२} = डस^{२} + ईस^{२} - २\, सई \cdot सड \cdot को\angle डसई$

लिहिल्या किंमती ठेव.

$डई^{२} = स्प^{२}घ + स्प^{२}म - २\, स्पघ \cdot स्पम \cdot कोअ$

$डई^{२} = छे^{२}घ + छे^{२}म - २\, छेघ \cdot छेम \cdot कोथ$ या समीकरणांत (७१) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

$डई^{२} = १ + स्प^{२}म + १ + स्प^{२}घ - २\, छेघ \cdot छेम \cdot कोथ$ आतां $डई^{२}$ याच्या दोन्ही किंमती बराबर लिहून.

$स्प^{२}घ + स्प^{२}म - २\, स्पघ \cdot स्पम \cdot कोअ = २ + स्प^{२}घ + स्प^{२}म - २\, छेघ \cdot छेम \cdot कोथ$

या समीकरणांतील पदास स्थलांतर कर. आणि चिन्हें बदल करून दोहोंनीं भाग.

छेघ · छेम्न · कोश्र = स्पघ · स्पम्न · कोअ + १

या समीकरणाचा डाव्या बाजूंत (छे = $\frac{१}{\text{कोभु}}$) ही व उजव्या बाजूंत (२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

$$\frac{\text{कोश्र}}{\text{कोघ}\cdot\text{कोम्न}} = \frac{\text{भुघ}\cdot\text{भुम्न}\cdot\text{कोअ}}{\text{कोघ}\cdot\text{कोम्न}} + १$$ छेदसम करून रद्द केल्यानें.

कोश्र = भुघ · भुम्न · कोअ + कोघ · कोम्न* - - - - (८५)

या सारणी कोष्टकावरून सिद्ध होतें कीं, कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणाच्या एका बाजूची कोभुजज्या त्याच बाजूच्या समोरील कोनाची कोभुजज्या आणि दुसऱ्या दोन बाजूंच्या भुजज्या यांच्या गुणाकार अधिक त्याच बाजूंच्या कोभुजज्यांच्या गुणाकार याबराबर आहे.※ याजवरून पुढील दोन सारणी कोष्टक होतात.

---

* या सारणी कोष्टकांत कोश्र, कोअ, कोघ, कोम्न, यांची किंमत हे अवयव लघु असल्यास (धन) आणि विशाळ असल्यास (४) कलमाप्रमाणें (ऋण) होत्ये. परंतु (धन) किंवा (ऋण) याचा निर्णय (श्र), (अ) (घ), (म्न) हे अवयव लघु अथवा विशाळ समजल्या शिवाय सारणी कोष्टकानेंच होत नाहीं. या प्रमाणें पुढील सारणी कोष्टकांचा ही विचार आहे.

※ याची सत्यता (३१) कलमांतील आकृतीचा (व) आणि (क३) कोन

कोघ = भुळ · भुन · कोब + कोळ · कोन - - - - (८६)

कोन = भुळ · भुघ · कोक + कोळ · कोघ - - - - (८७)

३२ आतां (८५) सारणी कोष्टकास स्थलांतर करून व गुणक सोडवून. कोअ = $\frac{\text{कोळ} - \text{कोघ} \cdot \text{कोन}}{\text{भुघ} \cdot \text{भुन}}$ ही तीन बाजू दिल्यापासून कोनाची कोभुज्या निघाली. याप्रमाणेंच कोणत्याही त्रिकोणाचा तीन बाजू समजल्या असतां तीनही कोन कळतात.

३३ आतां वरील समीकरणाचे छेद सोडवून.

कोअ · भुघ · भुन = कोळ - कोघ · कोन हें समीकरण भुघ · भुन = भुघ · भुन यांत एक वेळ वजा करून व एक वेळ मिळवून आणि साधारण गुणक काढून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

(१-कोअ) · भुघ · भुन = कोघ · कोन + भुघ · भुन - कोळ

(१+कोअ) · भुघ · भुन = कोळ - (कोघ · कोन - भुघ · भुन)

आतां या समीकरणाचा डाव्या बाजूंत (३२) व (३१) आणि उजव्या बाजूंत (१५) व (१४) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किमती लिहून.

. बिंदूस स्पर्श. रेषा करून कृत्य फिरवून वरील रितीप्रमाणें पाहिलें असतां सहज कळेल.

$$\left.\begin{array}{l} 2\,\text{भु}^2\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन} = \text{को}(\text{घ}-\text{न}) - \text{कोश} \\ 2\,\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन} = \text{कोश} - \text{को}(\text{घ}+\text{न}) \end{array}\right\}\text{या दोनहीं}$$

समीकरणांत (२३) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून; आणि दोहोंनीं भागून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{भु}^2\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन} = \text{भु}\tfrac{1}{2}(\text{श}+\text{घ}-\text{न})\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}(\text{श}+\text{न}-\text{घ})$$

$$\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन} = \text{भु}\tfrac{1}{2}(\text{घ}+\text{न}+\text{श})\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}(\text{घ}+\text{न}-\text{श})$$

आतां तीन बाजूंचा बेरजे बराबर (२ज) धरून व गुणक सोडवून आणि वर्गमूळ काढून.

$$\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ} = \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{ज}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{ज}-\text{न})}{\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}} \quad \text{------}(८८)$$

$$\text{को}\tfrac{1}{2}\text{अ} = \sqrt{\frac{\text{भुज}\cdot\text{भु}(\text{ज}-\text{श})}{\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}} \quad \text{------}(८९)$$

३४ आतां (८८) आणि (८९) या सारणी कोष्टकांनीं परस्परास भागून डाव्या बाजूंत (३) आणि (४) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेवून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ} = \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{ज}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{ज}-\text{न})}{\text{भुज}\cdot\text{भु}(\text{ज}-\text{श})}} \quad \text{......}(९०)$$

$$\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{अ} = \sqrt{\frac{\text{भुज}\cdot\text{भु}(\text{ज}-\text{श})}{\text{भु}(\text{ज}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{ज}-\text{न})}}$$

या प्रमाणेंच (ब) आणि (क) यांचा भुजज्या इत्यादि (८६) आणि (८७) या सारणी कोष्टकां पासून वरील रिती प्रमा

ण नि.घतात.

$$\left.\begin{aligned} \text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब} &= \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}{\text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})}} \\ \text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क} &= \sqrt{\frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})}{\text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}} \end{aligned}\right\}\text{आतां या दोन}$$

ही स्पर्शरेषांस (१०) सारणीकोष्टकानें भागून.

$$\frac{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब}}{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}}=\frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})}{\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})};\ \frac{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क}}{\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}}=\frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})}{\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}\ \cdots(११)$$

३५ पुनः स्प $\tfrac{1}{2}$ ब आणि स्प $\tfrac{1}{2}$ क या समीकरणांस (१०) सारणीकोष्टकानें गुणून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\left.\begin{aligned} \text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब} &= \frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}{\text{भुअ}} \\ \text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क} &= \frac{\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})}{\text{भुअ}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(१२)$$

३६ आतां (८८) आणि (८९) हे सारणीकोष्टक परस्पर गुणून व त्यांची दुपट करून आणि डाव्या बाजूत (२०) सारणीकोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून व अति सरळ रूप देऊन खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{भुअं}=\frac{२\sqrt{\text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}}{\text{भुघ}\cdot\text{भुम}}\ \cdots(१३)$$

याच प्रमाणें, भुब आणि भुक यांचा किमती निघतात. म्हणजे ज्या ज्या भुजं ज्ये बराबर किंमत काढावयाची असेल;

त्या त्या कोनास मोरील बाजू भाजकांत येत नाहीं. या प्रमाणें तीनही बाजू दिल्या असतां तीनही कोनांचा भुजज्या निघतात ३७ आतां या (९३) सारणी कोष्टकाचा दोनही बाजूंस भुश्र यानें भागून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{भुअ}{भुश्र} = \frac{२\sqrt{भुअ \cdot भु(अ-श्र) \cdot भु(अ-घ) \cdot भु(अ-म्न)}}{भुश्र \cdot भुघ \cdot भुम्न}$$

याच प्रमाणें (३६) कलमांत भुब आणि भुक यांस बराबर जाकिमती येतील, त्या दोन समीकरणांचा दोहों बाजूंस भुघ आणि भुम्न यांनीं अनुक्रमें भागिलें असतां उजव्या बाजू या कलमांतील समीकरणा प्रमाणें होतात. याज करितां डाव्या बाजू परस्पर बराबर मांडिल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{भुअ}{भुश्र} = \frac{भुब}{भुघ} = \frac{भुक}{भुम्न} \quad - - - - - - - - - - (९४)$$

आतां या सारणी कोष्टकांतील सर्व पदें प्रमाणांत लिहून.

$$भुश्र : भुअ :: भुघ : भुब :: भुम्न : भुक$$

या वरून सिद्ध होतें कीं कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा कोनांचा भुजज्या बाजूंचा भुजज्यांशीं प्रमाणांत आहेत. म्हणून हीं पदें परस्पर गुणून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरणें होतात.

भुअ · भुघ = भुब · भुळ
भुअ · भुम = भुक · भुळ
भुब · भुम = भुक · भुघ

३९ आतां (८५) आणि (८७) सारणी कोष्टक घे.

कोळ = भुघ · भुम · कोअ + कोघ · कोम

कोम = भुळ · भुघ · कोक + कोळ · कोघ, या समीकरणास कोघ यानें गुणून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

कोम · कोघ = भुळ · भुघ · कोघ · कोक + कोळ · कोघ

या समीकरणाच्या डाव्या बाजू बराबरील किंमत वरील दोन समीकरणांतून प्रथम समीकरणाचा उजव्या बाजूतील दुसऱ्या पदांत ठेवित्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

कोळ = भुघ · भुम · कोअ + कोक · भुळ · भुध · कोघ + कोळ · कोघ

स्थलांतर करून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

कोळ − कोळ · कोघ = कोअ · भुघ · भुम + कोक · भुळ · भुघ · कोघ

या समीकरणांतून साधारण गुणक काढून (१ − कोघ) = भुंघ ही किंमत ठेवूनें आणि भुघ यानें भागून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

कोळ · भुघ = कोअ · भुम + कोक · भुळ · कोघ

या समीकरणास भुञ याने भागून आणि (भुड / भुञ = भुक / भुञ)* हीं बराबरीची किंमत उजव्या बाजूंतील प्रथम पदांत ठेवून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतो.

कोस्प ञ · भुघ = कोस्प अ · भुक + कोक · कोघ - - - - (९५)

या रिती प्रमाणें दोन दोन कोण त्या हीं बाजू अनुक्रमें धरिल्या असतां पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

कोस्प ञ · भुड = कोस्प अ · भुब + कोब · कोड - - - - (९६)

कोस्प घ · भुञ = कोस्प ब · भुक + कोक · कोञ - - - - (९७)

कोस्प घ · भुड = कोस्प ब · भुअ + कोअ · कोड - - - - (९८)

कोस्प ड · भुञ = कोस्प क · भुब + कोब · कोञ - - - - (९९)

कोस्प ड · भुघ = कोस्प क · भुअ + कोअ · कोघ - - - - (१००)

हे सहा सारणी कोष्टक, एक बाजू व तिचा समोरचा कोन आणि दुसरी बाजू व तिचा समोरील कोन यांचा वांचून दुसरा कोन यांचा परस्पर संबंध दाखवितात. याजवरून असें सिद्ध होतें कीं दोन बाजू आणि अंतर कोन सांगितल्या असतां दुसरा कोन काढितां येतो; आणि तसेंच दोन कोन व अंतर बाजू सांगितल्या असतां दुसरी बाजू काढितां येते. यांत जो कोन किंवा बा

* हें प्रमाण (३७) कलमाचा शेवटील दुसऱ्या समीकरणाचे परस्पर गुणक सोडविल्यापासून होतें

नू कादावयाची असेल तिचा कोस्पर्श रेषेपासून काढितां ये
ईल. परंतु ही रीति लाग्रतमानें गणित करण्याचा उपयोगी
नाहीं; कारण यांत बेरीज घ्यावयाची आहे.

७४. आतां (१५) आणि (१७) या सारणी कोष्टकांतून(घ)र
द्द करणें आहे, या साठीं (१५) सारणी कोष्टकास भुश्र व (१७)
सारणी कोष्टकास (भुघ. कोक) यानें गुणून खालीं लिहि-
ल्या प्रमाणें होतें.

कोश्र. भुघ = भुश्र. कोस्पअ. भुक+भुश्र. कोघ. कोक

भुश्र. कोघ. कोक = भुघ. कोस्पब. भुक. कोक + कोश्र. भुघ. कोक

आतां प्रथम समीकरणाचा उजव्या बाजूंतील दुसरें पद (भुश्र
कोघ. कोक.) असें आहे. त्याचा ठिकाणीं दुसऱ्या समीकरणा-
ची उजवी बाजू ठेव; आणि उजव्या बाजूंतील शेवटील पदास
स्थलांतर करून व (१-कोक = भुक) हा किंमत ठेव. नंतर
भुकनें भागल्यास जे खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न
होतें.

कोश्र. भुघ. भुक = कोस्पअ. भुश्र+कोस्पब. कोक. भुघ

या समीकरणाचा उजव्या बाजूंतील प्रथम पदांत (४)
सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेविली असतां तें पद खालीं
लिहिल्या प्रमाणें होतें.

(कोअ·भुग)/भुअ या पदांत (३७) कलमाचा शेवटील प्रथम समीकरणाचे परस्पर गुणकर्मा इषितः पासून झालेल्या पदां बराबरील किंमत खालीं लिहितों.

(कोअ·भुघ)/भुब ; याच प्रमाणें वर लिहिलेल्या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील दुसऱ्या पदांत (४) मारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून.

(कोब·कोक·भुघ)/भुब ; आतां हें, व वरील, हीं दोन पदें वरचा समीकरणाचा उजव्या बाजूंत ठेवून आणि भुब/भुघ ; यानें गुणून.

कोग·भुब·भुक = कोअ + कोब·कोक यास, स्थलांतर करून.

कोअ = कोग·भुब·भुक − कोब·कोक - - - - - (१०१

यावरून सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा एका कोनाची कोभुजज्या त्याचा समोरचा बाजूची कोभुजज्या गुणिली दुसऱ्या दोन कोनांचा भुजज्यांनीं उणी त्याच दुसऱ्या दोन कोनांचा कोभुजज्यांचा गुणाकार, याज बराबर आहे. याजकरितां दुसऱ्या दोन कोनांचा कोभुजज्यां बराबरील किमती खालीं लिहितों.

कोब = कोघ·भुअ·भुक − कोअ·कोक - - - - (१०२)

कोक = कोम·भुअ·भुब - कोअ·कोब · · · (१०३)

४० वरील (१०१), (१०२) आणि (१०३) यांतील सारणी कोष्टकांपासून जेव्हां कोन सांगितले आहेत; तेव्हां स्वाभाविक भुजज्या, कोभुजज्या यांचा योगानें बाजू कळतात. हे सारणी कोष्टक बाजू काढावयास उपयोगी आहेत, याजकरितां (१०१) सारणी कोष्टकांतील पदांस स्थलांतर करून गुणक सोडविल्यानें त्याचें रूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल.

$$\text{को}\,अ = \frac{\text{कोअ} + \text{कोब}\cdot\text{कोक}}{\text{भुब}\cdot\text{भुक}}$$

, याप्रमाणें कोन सांगितले असतां बाजू निघतात.

याच प्रमाणें घ आणि म बाजूंचा कोभुजज्या (१०२) आणि (१०३) या सारणी कोष्टकांपासून वरील रिती प्रमाणें काढितां येतील.

४१ आतां (१०१), (१०२) व (१०३) आणि (८५), (८६) व (८७) या सारणी कोष्टकांत सादृश्य आहे; इतकाच फेर कीं यांत कोनांचा कोभुजज्यां बराबर किमती आहेत, आणि (८५), (८६) व (८७) यांत बाजूंचा कोभुजज्यां बराबर किमती आहेत, व चिन्हें उणी आहेत. याजवरून (८५), (८६) (८७) आणि (१०१), (१०२), (१०३) या सारणी कोष्टकांचा

सून गोलीय त्रिकोणाचा तीन बाजू किंवा तीन कोन दिले असतां बाकी तीन अवयव ह्मणजे बाजू किंवा कोन निघतील; अथवा (८५), (८६), (८७) या सारणी कोष्टकांतील बाजू व कोन सपूमेंटरी ह्मणजे ध्रुवक, त्रिकोणाचे अवयव धरिल्यास (को अ) आहे, त्या ठिकाणीं (को-अ) या प्रमाणें च (को घ) चा ठिकाणीं (को-ब) आणि (को म) याचा ठिकाणीं (को-क) लिहिला तरीं चालेल; कारण हे कोंस परस्परांचे सपूमेंट आहेत. ह्मणून त्यांचा कोभुज ज्या बरोबर आहेत; परंतु चिन्हें मात्र ऋण अशा त्रिकोणास ध्रुवक, त्रिकोण ह्मणतात. याजकरितां (८५) सारणी कोष्टकाचें रूप खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

को(ग-अ) = को(ग-अ)·भु(ग-ब)·भु(ग-क)

+ को(ग-ब)·को(ग-क)

या समीकरणाचें (४) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें खालीं लिहिल्या पद्धतीचें रूप होईल.

- को अ = - को अ·भु ब·भु क + को ब·को क

याचीं चिन्हें बदल केलीं असतां (१०१) सारणी कोष्टका प्रमाणें समीकरण सिद्ध होतें, यावरून (८५), (८६) आणि (८७) या सारणी कोष्टकांन जापेक्षां गोलीय त्रिको

णाचे सर्व धर्म आहेत, त्यापेक्षां बाजू आणि कोन यांचा संबंध दाखविणारा सारणी कोष्टक याही रीतीनें बाजूंचा ठिकाणीं कोन आणि कोनांचा ठिकाणीं बाजू लिहून सर्व कोभुजज्यांचा मागें उणें चिन्ह ओढिल्यानें सिद्ध करितां येईल.

४२ आतां (१०१) या सारणी कोष्टकांतील पदांस स्थलांतर करून खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

कोअ · भुब · भुक = कोअ + कोब · कोक

हें समीकरण (भुब · भुक) यांतून एकवेळ वजा करून, उजव्या बाजूंतील उणें चिन्ह साधारण बाहेर काढ व एकवेळ मिळवून या दोनही समीकरणांचा डाव्या बाजूंतील गुणक बाहेर काढिल्यानें खालीं लिहिलेलीं समीकरणें उत्पन्न होतात.

(१-कोअ) · भुब · भुक = -((कोब · कोक - भुब · भुक) + कोअ)

(१+कोअ) · भुब · भुक = कोब · कोक + भुब · भुक + कोअ

या दोन समीकरणांत (२२) व (२१) आणि (१४) व (१५) या सारणी कोष्टकाप्रमाणें अनुक्रमें किमती लिहून खालीं लिहिल्याप्रमाणें समीकरणें होतात.

२ भुं ½ अ · भुब · भुक = -(कोअ + को (ब+क))

$$२ कों \tfrac{१}{२} ञ \cdot भुब \cdot भुक = को(ब-क) + कोंअ$$

या दोन ही समीकरणांत (२२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून, आणि दोहोंनीं भागून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$भु \tfrac{१}{२} ञ \cdot भुब \cdot भुक = - को \tfrac{१}{२}(ब+क+अ) \cdot को \tfrac{१}{२}(ब+क-अ)$$

$$कों \tfrac{१}{२} ञ \cdot भुब \cdot भुक = को \tfrac{१}{२}(अ+ब-क) \cdot को \tfrac{१}{२}(अ+क-ब)$$

यांत अ, ब, क या तीन कोनांचा बेरजे बराबर (२स) धरून आणि गुणक सोडवून, व मूळ कांढून खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$भु \tfrac{१}{२} ञ = \sqrt{\frac{-कोस \cdot को(स-अ)}{भुब \cdot भुक}} \text{ - - - - - } (१०४)$$

$$को \tfrac{१}{२} ञ = \sqrt{\frac{को(स-ब) \cdot को(स-क)}{भुब \cdot भुक}} \text{ - - - } (१०५)$$

४३ आतां (१०४) सारणी कोष्टकास (१०५) सारणी कोष्टकानें भागून व डाव्या बाजूंत (२) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून, खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक होतो.

$$स्प \tfrac{१}{२} ञ = \sqrt{\frac{-कोस \cdot को(स-अ)}{को(स-ब) \cdot को(स-क)}} \text{ - - - - - - - } (१०६)$$

आतां (१०४) आणि (१०५) या सारणी कोष्टकांचा गुणा-

कारांची दुपट करून डाव्या बाजूंन (३०) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव.

$$\text{भुश} = \frac{2\sqrt{-\text{कोस}\cdot\text{को}(\text{स}-\text{अ})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{ब})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{क})}}{\text{भुब}\cdot\text{भुक}} \quad (१०७)$$

४४ आतां (१०२) सारणी कोष्टकांतून (१०१) सारणी कोष्टक वजा करून व उजव्या बाजूंतील साधारण गुणक काढून.

$$\text{कोब} - \text{कोअ} = \text{भुक}\cdot(\text{कोघ}\cdot\text{भुअ} - \text{कोश}\cdot\text{भुब}) + \text{कोक}(\text{कोब} - \text{कोअ})$$

आतां उजव्या बाजूंतील शेवटील, पदास स्थलांतर करून व साधारण गुणक काढून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$(१ - \text{कोक})(\text{कोब} - \text{कोअ}) = \text{भुक}\cdot(\text{कोघ}\cdot\text{भुअ} - \text{कोश}\cdot\text{भुब})$$

आतां (३२) सारणी कोष्टका प्रमाणें डाव्याबाजूंन व (३०) सारणी कोष्टका प्रमाणें उजव्या बाजूंन किंमत ठेवून आणि (२ भु $\frac{1}{2}$ क) यानें दोन ही बाजूंस भागून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{कोब} - \text{कोअ} = \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot(\text{कोघ}\cdot\text{भुअ} - \text{कोश}\cdot\text{भुब})$$

आतां या समीकरणास (भुअ - भुब) आणि (भुअ + भुब) यांनीं अनुक्रमें भागून व (२७) आणि (२८) या सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमती लिहून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरणें होतात.

$$\left.\begin{aligned} \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब}) &= \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot\frac{\text{को घ}\cdot\text{भुअ}-\text{को ऊ}\cdot\text{भुब}}{\text{भुअ}-\text{भुब}} \\ \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब}) &= \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot\frac{\text{को घ}\cdot\text{भुअ}-\text{को ऊ}\cdot\text{भुब}}{\text{भुअ}+\text{भुब}} \end{aligned}\right\}$$

या समीकरणांचा उजव्या बाजूंतील अंश आणि छेद यांस (भुम्न) यानें गुणून आणि (भुअ, भुब, भुक) यांचा ठिकाणीं (भुऊ, भुघ, भुम्न) अशीं अनुक्रमें पदें ठेवून, नंतर (भुक) यानें अंश आणि छेद भाग, ह्मणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\left.\begin{aligned} \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब}) &= \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot\frac{\text{को घ}\cdot\text{भुऊ}-\text{को ऊ}\cdot\text{भुघ}}{\text{भुऊ}-\text{भुघ}} \\ \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब}) &= \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot\frac{\text{को घ}\cdot\text{भुऊ}-\text{को ऊ}\cdot\text{भुघ}}{\text{भुऊ}+\text{भुघ}} \end{aligned}\right\}$$

आतां या समीकरणांत (१२) व (३४) आणि (३६) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें किमती अनुक्रमें दोनही समीकरणांचा उजव्या बाजूंत ठेवून खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब}) = \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot\frac{\text{को}\,\tfrac{1}{2}(\text{ऊ}-\text{घ})}{\text{को}\,\tfrac{1}{2}(\text{ऊ}+\text{घ})} \quad \text{- - - - (१०८)}$$

$$\text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब}) = \text{कोस्प}\,\tfrac{1}{2}\text{क}\cdot\frac{\text{भु}\,\tfrac{1}{2}(\text{ऊ}-\text{घ})}{\text{भु}\,\tfrac{1}{2}(\text{ऊ}+\text{घ})} \quad \text{- - - - (१०९)}$$

आतां (८६) सारणी कोष्टकांतून (८५) सारणी कोष्टक वजा करून आणि वर लिहिला संस्कार देऊन खालीं लिहि

त्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

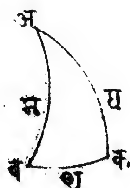
$$\text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{श}+\text{घ}) = \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}\text{म}\cdot\frac{\text{को}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब})}{\text{को}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब})} \quad \text{-----} (११०)$$

$$\text{स्प}\,\tfrac{1}{2}(\text{श}\,\cdot\,\text{घ}) = \text{स्प}\,\tfrac{1}{2}\text{म}\cdot\frac{\text{भु}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}-\text{ब})}{\text{भु}\,\tfrac{1}{2}(\text{अ}+\text{ब})} \quad \text{-----} (१११)$$

हे चार सारणी कोष्टक नेपियर याचा लाग्रतमानें गणित करण्यास फार उपयोगी झाले.

आतां (७१) कलमांतील आकृतीपासून एथपर्यंत झालेले सारणी कोष्टक कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा बाजू व कोन यांचीं उदाहरणें करण्यास उपयोगी आहेत.

४५ आतां वरजे, सारणी कोष्टक व समीकरणें तयार झालीं, तीं काटकोन त्रिकोणावर लाविलीं असतां सोपीं होतात. कारण, त्यांत काटकोनाची कोभुजज्या किंवा कोस्पर्शरेषा असत्ये, यामुळें कित्येक पदें उडतात.



आतां या आकृतीस (क) कोन काटकोन असेल, तर त्याची कोभु. = ० आणि कोस्प. = ० आणि भु. =१ आहे.

तेव्हां (९७) सारणी कोष्टकांत (क) काटकोन मानिला असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण होतें.

कोस्पघ · भुछ = कोस्पब

या समीकरणास $\left(\frac{\text{भुघ}}{\text{कोस्पघ} \cdot \text{भुघ}}\right)$ यानें गुणून आणि (५) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झाली, जी (कोस्पघ $= \frac{1}{\text{स्पघ}}$) ही किंमत उजव्या बाजूंतील पदाचा छेदांत ठेवून, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

भुछ = स्पघ · कोस्पब

आतां (२७) कलमाचा शेवटील (९४) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्यांतील दुसऱ्या समीकरणांत ∠क, काटकोन मानिला असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

भुछ = भुम · भुअ

याच रितीनें (१०३) सारणी कोष्टकास स्थलांतर करून व ∠क, काटकोन मानून, (भुअ · भुब) यानें भागिल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण होतें.

कोम = कोस्पअ · कोस्पब

याच प्रमाणें (८७) सारणी कोष्टकापासून खालीं लिहिलेलें समीकरण उत्पन्न होतें.

कोम = कोछ · कोघ

तसेंच (१००) सारणी कोष्टकांत ∠क, काटकोन धरू

न आणि (कोघ) यानें भागून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण होतें.

कोअ = स्पघ · कोस्पन्न

याच रितीनें (१०१) सारणी कोष्टकापासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होतें.

कोअ = कोख · भुब

वरजीं काटकोन त्रिकोणा विषयीं निरनिराळीं सिद्ध झालेलीं, समीकरणें तीं सर्व खालीं लिहितों.

भुख = स्पघ · कोस्पब = भुन्न · भुअ - - - - - (११२)

कोन्न = कोस्पअ · कोस्पब = कोख · कोघ - - - - - (११३)

कोअ = स्पघ · कोस्पन्न = कोख · भुब - - - - - (११४)

४६ आतां यातीनही सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून खालीं लिहिलेले, सिद्धांत उत्पन्न होतात.

प्रथम सिद्धांत.

त्रिज्या, आणि एक पायँ याचा भुजज्येचा जो काटकोन चौकोन ह्मणजे गुणाकार होतो. तो जवळचा तिर्कस कोनाची कोस्पर्श रेषा आणि दुसरा जो पाय त्याची स्पर्श रेषा

---

* जा दोन बाजूंमधील अंतर कोन काटकोन असेल, त्या बाजूंस पाय ह्मणतात.

यांचा काटकोनचौकोनाबराबर किंवा जो पाय घेतला असेल, त्या समोरच्या कोनाची भुजज्या व कर्णाची भुजज्या यांचा गुणाकाराबराबर आहे.

दुसरा सिद्धांत.

त्रिज्या आणि कर्णाची कोभुजज्या यांचा गुणाकार, तिर्कस कोनांचा कोस्पर्शरेषांचा गुणाकाराबराबर, अथवा जे दोन पाय त्यांचा कोभुजज्यांचा गुणाकाराबराबर आहे.

तिसरा सिद्धांत.

त्रिज्या आणि तिर्कस कोनांतून एक कोनाची कोभुजज्या यांचा गुणाकार जवळच्या जो पाय त्याची स्पर्शरेषा आणि कर्णाची कोस्पर्शरेषा यांचा गुणाकाराबराबर किंवा समोरच्या जो पाय त्याची कोभुजज्या आणि दुसऱ्या तिर्कस कोनाची भुजज्या यांचा गुणाकाराबराबर आहे.

या सिद्धांतांपासून काटकोन त्रिकोणाचे सर्व अवयव निघतात.

उदाहरण.

डिसेंबर महिन्याच्या एकविसाव्या तारखेस रत्नागिरींत सूर्योदय किती वाजतां होईल? रत्नागिरी, सत्रा अक्षांशांवर आहे; आणि इष्ट तारखेस सूर्याची क्रांति २३° २८ आहे.

या उदाहरण संबंधी व्याख्या.

खस्वस्तिक. तेंच होय, जो आपल्या मस्तकावरील आकाशांतील बिंदु.

क्षितिजवृत्त. तेंच होय, जेथें पृथ्वीस आकाश लागलेलें दिसतें.

याम्योत्तरवृत्त. तेंच होय, जें विषुववृत्तावर लंब असून दोन्हीं ध्रुवांतून जातें.

उन्मंडल विषुववृत्तावर उभें राहिलें असतां जें क्षितिजवृत्त, होतें तें.

क्रांति. विषुववृत्तापासून कोणत्याही ताऱ्यापर्यंत याम्योत्तरजें अंतर, त्यास त्या ताऱ्याची क्रांति ह्मणतात.

आतां सूर्योदयास कमजास्ती वेळ लागण्याचें कारण. त्याचा आरोपित गमनमार्गाचा क्षितिजावरील वर्तुळखंड लहान; व क्षितिजाखालील मोठा; अथवा क्षितिजावरील मोठा व खालील लहान, असणें हेंच आहे. तसेंच खस्वस्तिकापासून सर्व दिशांकडे क्षितिजापर्यंत नव्वद नव्वद अंश असतात. ह्मणजे मनुष्य कोठेंही सपाटीवर उभा असो, तथापि क्षितिजावर अर्ध आकाशगोल त्यास दिसतो. याच प्रमाणें कोणताही तारा क्षितिजाजवळ

आल्या शिवाय दिसत नाहीं; हें सर्वांस माहीतच असेल.

जर विषुववृत्तावर उभें राहिलें; तर दक्षिणोत्तर दोन ही ध्रुवां पर्यंत क्षितिज होईल. परंतु उत्तर गोलार्धांत कांहीं अक्षांशांवर उभें राहिल्यास तितके अंश दक्षिण ध्रुवावर, व उत्तर ध्रुवा खालीं, क्षितिज जाईल. आतां उत्तरार्धांतील पहाणाराचें क्षितिज, विषुववृत्ताशीं मीत्र उन्मंडलास छेदून तेथून चढतें जातां जातां दक्षिण ध्रुवाचा वरून, आणि उत्तर ध्रुवाचा खालून, पुढील आकृतींत दाखविल्या प्रमाणें जाईल. आणि उन्मंडल, व क्षितिज, यांज मधील सूर्याचा आरोपित गमन मार्गाचा रेड, अतिक्रमण करावयास जो त्याला काळ लागतो; तेच सूर्योदयाचा न्यूनाधिक काळ, आहे.

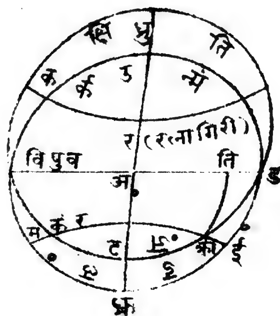
या आकृतींत.

रट = ९०°

रअ = १७° अक्षांश हें पूर्वी सांगितलेंच आहे.

अट = ७३°

याज करितां अट चा रअ हा कांपूमेंट आहे.



तसेंच क्रांति = २३ २८ ही या उदाहरणांतील सूर्याची स्पष्टक्रांति आहे.

$\angle$ क्रांतिड = ९०°; $\angle$ तिडक्रां = ७३, कारण (ध्रुरअटध्रु) या वृत्ताचा ध्रुव (ड) आहे. ह्मणून तिडक्रां हा कोन (अट) कोंसानें मापला जातो.

आतां वरील उदाहरणांत उन्मंडल आणि क्षितिज यां मधील सूर्याचा आरोपित गमन मार्गाचा खंड (क्राई) यां तील अंश संख्या विषुववृत्तावरील (तिड) खंडांतील अंश संख्ये बराबर आहे. कारण त्या दोनही वृत्तांचा (ध्रु) हा ध्रुव आहे. ह्मणून (क्राई) चा ठिकाणीं (तिड) घेतला असतां इच्छित उदाहरणें करून (क्रांतिड) हा गोलीय काटकोन त्रिकोण होतो. त्याचें पृथक्करण पहिल्या सिद्धांत रितीनें होतें.

त्रिज्या × भु (तिड) = कोस्प $\angle$ तिडक्रां × स्प क्रांति; या समीकरणाचा उजव्या बाजूतील कोस्पर्शरेषेचा स्थलीं त्याचकोनाचा कांपूमेंटाची स्पर्शरेषा लिहून.

त्रिज्या × भु (तिड) = स्प र अ × स्प क्रांति; यांत, र अ = अक्षांश आहेत ह्मणून

त्रिज्या × भु (तिड) = स्प अक्षांश × स्प क्रांति

त्रिज्या × भु (तिड) = स्प १ ७° × स्प २३° २८′

लाग्रतमानें लिहिल्यास.

ला त्रिज्या + ला भु (तिड) = ला स्प १७° + ला स्प २३° २८′ स्थलांतर करून, ला भु (तिड) = ला स्प १७° + ला स्प २३° २८′ – ला त्रिज्या किमती ठेवून.

ला भु (तिड) = ९·४८५३३९ + ९·६३७६११ – १० = ९·१२२९५० ही भुजज्या ७° ३७′ ३७″ यांची आहे.

तिड = ७° ३७′ ३७″
४
} आतां १५ अंशांस एक तास, अथवा दर अंशास चार मिनुटें आहेत ह्मणून चोहोंनीं गुणून.

मिनुटें	सेकंद	प्रतिसेकंद
३०	३०	२८

इतका काल (तिड) खंड क्रमण करावयास लागेल; हा दक्षिण क्रांतींतील आहे. याजकरितां सहा अवरांत मिळविला पाहिजे; व उत्तर क्रांतींतील असल्यास वजा करावा लागतो. याजकरितां.

अवर	मिनुटें	सेकंद	प्रतिसेकंद
६	३०	३०	२८

इतक्या कालानें सूर्योदय होईल.

आतां हें उत्तर केवळ बरोबर नाहीं कारण भूसंनिहित वायु आहे, तेणें करून किरण वक्रीभवन पावून (३३)*

* हें मान सर्वदां बराबर असत नाहीं वायूचा भारानें व त्याचा उष्ण

तेतीस कला सूर्य क्षितिजाखालीं असतांच दिसूं लागतो. या ज करितां तितक्या कलांचा काल दरकलेस चार सेकंद या मानानें २ दोन मिन्युटें १२ बारा सेकंद वरील उत्तरांत वजा केला पाहिजे. व हें सर्व गणित भूकेंद्रापासून आहे ह्मणून भूपृष्ठावरील लोकांस तो क्षितिजावर * ८ आठ विकला आ ला ह्मणजे क्षितिजस्थ दिसतो. याजकरितां तितक्या विकलांचा काल बत्तीस प्रति सेकंद वरील उत्तरांत मिळवि ला पाहिजे. हीं दोन ही केलीं असतां

अ०	मि०	से०
६	२८	१२

इतक्या कालानें सूर्याचा मुंडलोदय होईल.

आतां याच दिवसाचा केंद्रोदयाची इच्छा असेल तर, सूर्य बिंबार्धाच्या कलांच्या काल वरील उत्तरांत मिळविला पाहिजे. तें बिंबार्ध १६' १७" इतकें आहे. याचा काळ एक मिन्यूट पांच सेकंद आठ प्रति सेकंद हा मिळविला असतां

अ०	मि०	से०	प्र०से०
६	२९	२४	८

इतक्या कालानें केंद्रोदय होईल

तें मुंके २९' ५४" पासून ३३' पर्यंत कमजास्ती होतें. परंतु याचें मध्यम मान ३१' ४५" आहे.

* हीं संख्या सर्वदा बराबर असत नाहीं. पृथ्वी पासून सूर्याचें दूरत्व अ सें अधिक उणें होतें तशी हीं संख्या न्यूनाधिक होत्ये. ती या त्रिकोण मितीनें निघत्ये.

परंतु मध्यम काल ह्मणजे इंग्रजी रितीचीं घड्याळें जो काल दाखवितात, त्याची इच्छा असेल तर वरील दिवसाचें कालाचें समीकरण, -(१ .. ४१) उणें एक मिन्युट एकेचाळीस सेकंद हें पूर्वोक्त दृश्य कालांत मिळविलें असतां मध्यमकाल ६ अवर २७ मिन्युटें ४३ सेकंद ८ प्रति सेकंद इतका होतो.

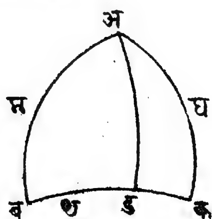
या रितीनें कोणत्याही दिवसाची क्रांति आणि स्थलाचे अक्षांश समजत्यापासून त्या स्थलींचें दिनमान काढतां यावें ह्मणून प्रत्येक दिवसाचा क्रांतिचा व कित्येक प्रसिद्ध स्थलांचा अक्षांशांचा कोष्टक या पुस्तकाचा शेवटीं दिला आहे. परंतु इष्ट दिवसाचा केंद्रोदयाची इच्छा असेल तर बिंबार्धाचा कलांचा दर कलेस चार सेकंद या प्रमाणें काल आले त्या उत्तरांत मिळविला पाहिजे, परंतु बिंब सर्वदां सारिखें असत नाहीं. डिसेंबर महिन्याचा एकविसाव्या तारखेचा सुमारें सूर्य पृथ्वीचा जवळ असतो ह्मणून त्याचें बिंब ३२′ ३५″ असतें. व तेव्हांपासून दूर जात जात जूनचा एकविसाव्या तारखेस परम दूर होतो. तेव्हां बिंबाचें मान ३१′ ३१″ होतें. या प्रमाणें प्रति दिवशीं न्यूनाधिक होतें ह्मणून त्याची एकच संख्या सांगतां येत नाहीं. परंतु सन १८३६ चा शिक्षामंडळीचा पंचांगांत प्रति महिन्याचा चौथ्या पृष्ठावर बिंबार्धाचा कला लि-

हिल्या आहेत त्यांचा काल वरील उत्तरांत मिळवावा ह्मणजे इच्छित दिवसाचा केंद्रोदय कळेल. आणि त्याच दिवसाचा मध्यम कालाची इच्छा असेल तर पूर्वोक्त पंचांगाचा प्रतिमासिक पहिल्या पृष्ठावर सहाव्या कोष्टकांत दर दिवसाचें कालाचें समीकरण आहे तें त्याचा चिन्हा प्रमाणें दृश्यकालास मिळवावें. ह्मणजे मध्यम काल कळेल.

याच प्रमाणें या पुस्तकांत जें लघु किंवा विशाळ अथवा काट कोन त्रिकोण यांचे सारणी कोष्टक इत्यादि लिहिले आहेत; ते सर्व भू व आकाश संबंधी गणिताचा उपयोगी आहेत.

तिर्कस कोन त्रिकोणा विषयीं विचार.

४७ तिर्कस कोन त्रिकोणांतील लंबाची योजना काट कोन त्रिकोणाचा समीकरणांत करून तिर्कस कोन त्रिकोणांचा उपयोगी सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.



या आकृतींत, अड लंब कर.
आणि कड = φ व ∠कअड = क्ष घे: तर बड = ष − φ आणि ∠बअड = अ − क्ष होईल.

आतां वरचा कलमांतील तिस

त्या सिद्धांतापासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण

कोक = कोस्पघ · स्प१

या समीकरणांत (५) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेली, (कोस्पघ = $\frac{१}{स्पघ}$) ही किंमत ठेवून आणि भाजक सोडवून, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

स्प१ = स्पघ · कोक - - - - - - - - - - - - - - (११५)

या सारणी कोष्टकाचा सहायानें लंबापासून कोनापर्यंत अंतर कळतें.

४८ आता घ, १, अड, हे अवयव एकाकाटकोन त्रिकोणांत, व भ, (७-१), अड हे दुसऱ्यांत धरिल्यास दुसऱ्या सिद्धांतापासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरणें होतात

कोघ = को१ · कोअड

कोभ = को(७-१) · कोअड

यांतील दुसऱ्यास, प्रथमानें भागून, पुढें लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{कोभ}{कोघ} = \frac{को(७-१)}{को१}$$ - - - - - - - - - - - (११६)

यावरून सिद्ध होतें कीं, लंबानें पायाचे झाले जे दोन खंड, त्यांचा कोभुजज्या, जवळचा बाजूंचा कोभुजज्यांशीं प्रमाणांत आहेत.

४९. पुनः प, क, अड हे एका काटकोन त्रिकोणांत आणि (७-प), ब, अड हे दुसऱ्यांत धरिल्यास प्रथम सिद्धांतापासून पुढें लिहिल्या प्रमाणें समीकरणें उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}\,\text{प} = \text{कोस्पक}\cdot\text{स्पअड}$$

$$\text{भु}(७-\text{प}) = \text{कोस्पब}\cdot\text{स्पअड}$$

यांतील प्रथमांस दुसऱ्यानें भागून खालीं लिहिल्याप्रमाणें

$$\frac{\text{भु}\,\text{प}}{\text{भु}(७-\text{प})} = \frac{\text{कोस्पक}}{\text{कोस्पब}}$$

आतां (५) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेल्या (कोस्पक = $\frac{१}{\text{स्पक}}$) आणि (कोस्पब = $\frac{१}{\text{स्पब}}$) या किमती वरील समीकरणाचा उभयबाजूंतील अंश आणि छेद स्थलीं ठेवून.

$$\frac{\text{भु}\,\text{प}}{\text{भु}(७-\text{प})} = \frac{\text{स्पब}}{\text{स्पक}} \quad \text{-------- (११३)}$$

यावरून सिद्ध होतें कीं, खंडांचा भुजज्या, जवळील कोनांचा स्पर्श रेषांशीं प्रमाणांत आहेत.

५०. आतां घ, क, क्र हे एका काटकोन त्रिकोणांत धरिल्यास (४६) कलमांतील दुसऱ्या सिद्धांतापासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{कोघ} = \text{कोस्पक}\cdot\text{कोस्पक्र}$$

या समीकरणाचा उभयबाजूंत (५) सारणी कोष्टका

पासून उत्पन्न झालेली, (कोस्पक $=\frac{१}{\text{स्पक}}$) ही, किंमत आणि दोनही बाजूंस (स्पक) यानें गुणिलें असतां खालीं लिहिल्याप्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्पक} = \frac{\text{कोस्पक}}{\text{कोघ}} \quad \text{-------------} (११८)$$

५१ याच प्रमाणें क, कू, अड हे, एका काटकोन त्रिकोणांत आणि ब, (अ-कू), अड हे, दुसऱ्यांत धरिल्यास (४६) कलमांतील तिसऱ्या सिद्धांतापासून पुढील समीकरणें होतात.

$$\text{कोक} = \text{भुकू} \cdot \text{कोअड}$$

$$\text{कोब} = \text{भु(अ-कू)} \cdot \text{कोअड}$$

यांतील दुसऱ्यास प्रथमानें भागून; खालीं लिहिल्याप्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{कोब}}{\text{कोक}} = \frac{\text{भु(अ-कू)}}{\text{भुकू}} \quad \text{---------} (११९)$$

यावरून सिद्ध होतें कीं, लंब आणि बाजू यांपासून जे कोन होतात; त्यांचा भुजज्या पाया कडील कोनांचा कोभुजज्यांशीं प्रमाणांत आहेत.

५२ आतां प्रथम घ, कू, अड व न, (अ-कू), अड हे आणि पुनः ९, कू, अड व (७-९), (अ-कू), अड हे अवयव धरून, वरचा रितीप्रमाणें खालीं लिहिलेसा

र णी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\frac{\text{को कु}}{\text{को(अ-कु)}} = \frac{\text{स्प म}}{\text{स्प घ}} \quad \text{(१२०)}$$

$$\frac{\text{स्प ॰}}{\text{स्प(थ-॰)}} = \frac{\text{स्प कु}}{\text{स्प(अ-कु)}} \quad \text{(१२१)}$$

यावरून सिद्ध होतें कीं, लंब आणि बाजू यांमधील कोनां चा कोभुजज्या, बाजूंचा स्पर्श रेषांशीं प्रमाणात आहेत. आणि त्या कोनांचा स्पर्श रेषा पायाचा खंडांचा स्पर्श रेषांशीं प्रमाणात आहेत.

भाग तिसरा.

गोलीय त्रिकोणांच्या पृथक्करणाचे वेगळाले प्रकार.

५३ गोलीय त्रिकोणास सहा अवयव आहेत. म्हणजे तीन बाजू आणि तीन कोन, आतां कोणत्या ही गोलीय त्रिकोणाचे तीन अवयव सांगितले असतां, राहिले तीन अवयव सांगितल्याचा आधारानें पुढील सिद्धांतावरून काढितां येतील.

१ जेव्हां तीन बाजू दिल्या असतील तेव्हां.

२ तीन कोन दिले आहेत तेव्हां.

३ दोन बाजू आणि अंतर कोन दिला असतां.

४ दोन कोन आणि अंतर बाजू दिली असतां

दोनबाजू आणि त्यांतून एका बाजूसमोरील कोन दिला असतां

६ दोन कोन आणि त्यांतून एका कोनासमोरील बाजू दिली असतां.

५४ आतां प्रथम सिद्धांताचीं उदाहरणें (८८), (८९), (९०) यांतून कोणत्याही सारणी कोष्टकापासून लाग्रनम रितीनें होतात म्हणून (८८) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना केली असतां, पुढें लिहिल्याप्रमाणें समीकरण उत्पन्न होतें

$$भु^{2}\tfrac{१}{२}अ = * \sqrt{\frac{भु(अ-घ)\cdot भु(अ-म)}{भुघ\cdot भुम}}$$

* जेव्हां कोना बराबरच्या किमतीत त्रिज्येची योजना केली, तेव्हां ती दाखवायास (र) आणि जेव्हां बाजूंबराबरच्या किमतीत केली, तेव्हां ती दाखविण्यास (ज) घेतला आहे. याजवरून स्पष्ट आहे कीं (र) आणि (ज) यांची किमत सर्वदां बराबर म्हणजे त्रिज्याच आहे

या मूळ (८८) सारणी कोष्टकात (र) गुणक नसून एथे गुणक लावण्याचें कारण असें आहे कीं, जेव्हां हा सारणी कोष्टक उत्पन्न झाला, तेव्हांच याला रितीप्रमाणें त्रिज्या गुणक होती. परंतु ती एक कल्पिल्यामुळे गुणक किंवा भाजक लाविली असतांही; किमतींत न्यूनाधिक होत नाही असे तिसऱ्या सारणी कोष्टकापासून (स्प कोभु = भु) असें होतें, परंतु याचा वास्तविक अर्थ (स्प·कोभु = भु त्रिज्या) असा आहे. तथापि त्रिज्या एक कल्पिल्यामुळें ती लाग्रनमाशिवाय जे सारणी कोष्टक सिद्ध झाले आहेत त्यांस गुणक किंवा भाजक असतांही लिहिली नाही. परंतु लाग्रनम कोष्टकांत एक सर्व त्रिज्या मानून भुजज्या इत्यादिकांचीं लाग्रनमें आहेत. याजकरितां ती, न लिहिल्यास किमती बराबर मिळणार नाहींत म्हणून रितीप्रमाणें जा सारणी कोष्टकांस त्रिज्या गुणक किंवा भाजक होती; ती लाग्रनमिक सारणी कोष्टकांस प्रत्यक्ष गुणक किंवा भाजक लाविली आहे.

अथवा हें चं समीकरण खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$भु\frac{1}{2}अ = \sqrt{\frac{र}{भुघ}\cdot\frac{र}{भुम्न}\cdot भु(अ-घ)\cdot भु(अ-म्न)}$$

हें च समीकरण लाग्रतमाचा रितीनें खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$लाभु\frac{1}{2}अ = \frac{1}{2}((१०-लाभुघ)+(१०-लाभुम्न)+लाभु(अ-घ)+लाभु(अ-म्न)) \cdots (१२२)$$

यांच रितीने (८९), (९०) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून लाग्रनमरुपानें लिहिल्यास खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक होतील.

$$लाको\frac{1}{2}अ = \frac{1}{2}((१०-लाभुघ)+(१०-लाभुम्न)+लाभुअ+लाभु(अ-ङ)) \cdots (१२३)$$

$$\left.\begin{array}{l} लास्प\frac{1}{2}अ = \frac{1}{2}((१०-लाभुअ)+(१०-लाभु(अ-ङ)) \\ \qquad +लाभु(अ-घ)+लाभु(अ-म्न)) \end{array}\right\} \cdots\cdots (१२४)$$

याशेवटील सारणी कोष्टकापासून असें सिद्ध होतें कीं, त्रिकोणाचा तीन बाजूंचा बेरजेचा अर्धाची लाग्रतमिक भुजज्या दहांतून वजा करावी; आणि जो कोन काढावयाचा असेल, त्याचा समोरची बाजू तीन बाजूंचा अर्ध बेरजेंत वजा करून बाकीची लाग्रतमिक भुजज्या दहांतून वजा करावी. आणि ती बाकी व पूर्वी दहांतून वजा केलेली बाकी यांची बेरीज घ्यावी. आणि त्या बेरजेंत काढावयाचा कोनासमोरील बाजू खेरीज करून बाकी दोन बाजू अर्ध बेरजेंतून निरनिराळ्या वजा करून त्यांचा

लाग्रतमिक भुज ज्यांची बरीज मिळवावी. आणि त्यां बेरजेस दोहोंनीं भागावें, ह्मणजे इच्छित्या कोनाचा अर्धाची लाग्रतमिक स्पर्श रेषा येईल.

याच सिद्धांताचा पृथक्करणार्थ (९३) सारणी कोष्टका पासून ही, समीकरण उत्पन्न होतें; परंतु कोन लघु किंवा विशाल याचा निर्णय होत नाहीं; व आणखी ही बहुत अडचणी आहेत. ह्मणून त्याचा व्यवहारांत फार उपयोग नाहीं; याजकरितां एथें लिहिलें नाहीं.

५५ (१२४) सारणी कोष्टका पासून एक कोन समज त्यावर बाकीचे कोन (९१) सारणी कोष्टका पासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें काढितां येतील.

लास्प $\frac{1}{2}$ ब = लास्प $\frac{1}{2}$ अ + लाभु (अ-छ) - लाभु (अ-घ) ... (१२५)

लास्प $\frac{1}{2}$ क = लास्प $\frac{1}{2}$ अ + लाभु (अ-छ) - लाभु (अ-ग) ... (१२६)

याच प्रमाणें स्पर्श रेषेचा व्युत्क्रम कोस्पर्श रेषा आहे. याजकरितां (९२) सारणी कोष्टका पासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें कोष्टक उत्पन्न होतात.

लाकोस्प $\frac{1}{2}$ ब = लाभु अ + लास्प $\frac{1}{2}$ अ - लाभु (अ-ग) ... (१२७)

लाकोस्प $\frac{1}{2}$ क = लाभु अ + लास्प $\frac{1}{2}$ अ - लाभु (अ-घ) ... (१२८)

जेव्हां एकच कोन काढावयाचा असेल; तेव्हां (१२४) सार

णी कोष्टकापेक्षां (१२२) किंवा (१२३) या सारणी कोष्टकांपासून सत्वर निघेल; परंतु जेव्हां लघुकोन काढावयाचा असेल तेव्हां (१२२) व विशाळ कोन काढावयाचा असेल, तेव्हां (१२३) सारणी कोष्टकाचा उपयोग करावा. कारण त्या ग्रनम अंकांचा साधारण कोष्टकापासून अर्धकोन अधिक बरोबर मिळतात. याजकरितां (१२२) आणि (१२३) सारणी कोष्टक घेण्यास फार योग्य आहेत.

टीप. एक कोन समजल्यावर बाकी कोन (७१) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्याचा सहाय्यानें निघतील. परंतु ती रीति (१२५) (१२६), (१२७) आणि (१२८) सारणी कोष्टकांत सांगितल्याप्रमाणें सुलभ नाहीं.

दुसरा सिद्धांत.

तीन कोन सांगितले आहेत तेव्हां.

५६. बाजू काढणें त्या (१०४), (१०५), (१०६), (१०७) या चार सारणी कोष्टकांचा उजव्या बाजूस (७) प्रमाणें त्रिज्या गुणकल्पून, (१२५), (१२६), (१२७), (१२८) या सारणी कोष्टकांची रिती प्रमाणें काढाव्या.

तिसरा सिद्धांत.

दोन बाजू आणि अंतरकोन दिला असतां.

५७ प्रथम दोन कोन काढण्याकरितां (१०८), (१०९) हे सारणीकोष्टक लाग्रतमरूपानें लिहून.

लास्प $\frac{१}{२}$(अ+ब) = लाकोस्प $\frac{१}{२}$ क + लाको $\frac{१}{२}$(छ−घ) − लाको $\frac{१}{२}$(छ+घ) ..(१२९)

लास्प $\frac{१}{२}$(अ−ब) = लाकोस्प $\frac{१}{२}$ क + लाभु $\frac{१}{२}$(छ−घ) − लाभु $\frac{१}{२}$(छ+घ) ..(१३०)

याप्रमाणें कोणत्याही दोन कोनांच्या बेरजेचें अर्ध आणि वजाबाकीचें अर्ध हीं समजलीं असतां; त्यांपासून दोन कोन निघतात. नंतर बाकी राहिलेली एक बाजू, (९४) सारणीकोष्टकापासून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्यांचा सहायानें अथवा त्यांपेक्षां अधिक सुलभ रितीनें (११०) किंवा (१११), सारणीकोष्टकांतील ($\frac{१}{२}$ म) याची किंमत काढिल्यानें निघत्ये.

५८ या सिद्धांतापासून प्रथम तिसरी बाजूच काढणें आहे; तर (११५) सारणीकोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो, व (११६) या सारणीकोष्टकास लाग्रतमाचें रूप देऊन निघत्ये.

लास्प φ = लास्प घ + लाकोक − १० . . . . (१३१)

लाकोम = लाकोघ + लाको(छ−φ) − लाको φ . . . . (१३२)

यावरून उघड दिसतें कीं, वरील सारणीकोष्टकांत (छ) च्या ठिकाणीं (घ) आणि (घ) च्या ठिकाणीं (छ) असें लिहि त्यास चिंता नाहीं. कारण अंतरकोनाशीं त्यांचा संबंध सा-

रि. खाचें आहे.

चौथा सिद्धांत.

दोन कोन आणि अंतर बाजू दिली आहे तेव्हां.

८९ प्रथमें दोन बाजू काढणें त्या (११०) आणि (१११) हे सारणी कोष्टक लाग्रतम रूपानें लिहिले असतां त्यांपासून निघतील.

लास्प $\frac{1}{2}$(छ+घ) = लास्प $\frac{1}{2}$ म + लाको $\frac{1}{2}$(अ-ब) - लाको $\frac{1}{2}$(अ+ब) ..(१३३)

लास्प $\frac{1}{2}$(छ-घ) = लास्प $\frac{1}{2}$ म + लाभु $\frac{1}{2}$(अ-ब) - लाभु $\frac{1}{2}$ (अ+ब) ..(१३४)

आतां या दोन सारणी कोष्टकांपासून बाजू निघाल्या वर राहिलेला कोन (३७) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेलीं, जीं तीन समीकरणें त्यांचा आधारानें अथवा त्यांपेक्षां अधिक चागल्या रितीनें (१०८) किंवा (१०९) सारणी कोष्टकापासून ही निघेल.

९० परंतु जर (घ), (अ), (क) दिलेले भाग असून प्रथम तिसरा कोनच काढणें असेल; तर (११८) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तोच (१११) या सारणी कोष्टकास लाग्रतमाचें रूप देऊन खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल.

लास्पकु = लाकोस्पक + ९० - लाकोघ . . . . . (१३५)

लाकोब = लाकोक + लाभु(अ-कु) - लाभुकु . . . (१३६)

पांचवा सिद्धांत.

दोन बाजू आणि त्यांतून एका बाजू समोरील कोन दिला असतां

६१ जर (छ) आणि (घ) या दोन बाजू आणि त्यांतून एकीचा समोरील; (अ) कोन दिला असेल तर दुसऱ्या बाजूच्या समोरील (ब) कोन (३१) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टकापासून झालेलीं जीं तीन समीकरणें त्यांतील पहिल्याचा आधारानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल.

लाभुब = लाभुअ + लाभुघ - लाभुछ - - - - - - - (१३७)

आतां या सारणी कोष्टकापासून (ब), कोन समजल्यावर (म) आणि (क) हे अवयव (१३३) आणि (१२९) या सारणी कोष्टकांतील पदांस स्थलांतर केल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघतात.

लास्प $\frac{1}{2}$ म = लास्प $\frac{1}{2}$(छ+घ) + लाको $\frac{1}{2}$(अ+ब) - लाको $\frac{1}{2}$(अ-ब) ... (१३८

लाकोस्प $\frac{1}{2}$ क = लास्प $\frac{1}{2}$(अ+ब) + लाको $\frac{1}{2}$(छ+घ) - लाको (छ-घ) .. (१३९

वर लिहिल्या प्रमाणेंच या कामासाठीं (१३४) आणि (१३०) यांपासून ही, सारणी कोष्टक सिद्ध होतील, हें उघड आहे.

६२ जर (ब) कोन संदिग्ध नसेल तर त्याज विषयीं विचार.

जेव्हां दिलेल्या बाजूंची बेरीज (१८०°) हून कमी असेल; तेव्हां लहान बाजू समोरील कोन लघु होईल; आणि जेव्हां त्या

दिले.त्यां दोन बाजूंचीं बेरीज (१८०°) हून अधिक असेल, तेव्हां मोठ्या बाजूसमोरील कोन विशाळ होईल; आणि जर त्या बाजूंची बेरीज (१८०) अंशच असेल, तर त्यांच्या समोरील कोनांची बेरीज तितकीच म्हणजे (१८०°) होईल. जेव्हां या रितीप्रमाणें कोनाचें निश्चय होत नाहीं तेव्हां (ब) कोनसे दिग्ध समजावा.

६३ परंतु जर प्रथम, (घ) तिसरी बाजूच काढणें आहे; तर (११५) व (११६) या सारणीकोष्टकांत (क) च्या ठिकाणीं (अ) व (ड) च्या ठिकाणीं (म), तसेंच (म) च्या ठिकाणी (ड) असा फेरफार करून व (११५) सारणीकोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो व (११६) या सारणीकोष्टकास लाग्रतमाचें रूप देऊन खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल.

लास्प १ = लास्प घ + लाको अ − १० - - - - - - (१४०)

लाको (म − १)† = लाको ड + लाको १ − लाको घ - - - (१४१)

---

† अशा उदाहरणाकरितां कित्येक सारणीकोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करावा, असें लिहिलें. याची सत्यता अशी आहे की, या उदाहरणीं (४७) कलमांतील आकृतींत (क) कोनापासून (म) बाजूवर लंब केला असतां, (अड) लंबाच्या योगानें झालेल्या सारणीकोष्टकांच्या आनीचीं येणारीं जीं समीकरणें त्यां प्रमाणें अक्षरांचा फेरफार केल्यापासून समीकरणें उत्पन्न होतात. म्हणून निरनिराळ्या बाजूवर लंब न करितां अक्षरांचा फेरफार करावा. याच प्रमाणें दुसऱ्या बाजू आणि कोन यांचा विचार आहे. यां वि

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची उजवी बाजू (न) आणि (
यांचें अंतर दाखविल्ये. या करितां (अ) आणि (ब) हे कोन
बरोबर किंवा न्यूनाधिक असतील; त्या प्रमाणें (न) हा (१) अ
णि (न-१) यांची बेरीज किंवा वजाबाकी दाखवील.

६४ याच प्रमाणें जर प्रथम दिलेल्या दोन बाजूंमधील (क)
अंतर कोनच का दर्णें असेल; तर (११८) आणि (१२०) किं.
वा (१२१) या सारणीकोष्टकांत वरच्या कलमांत सांगितल्या
प्रमाणें कारण पडेल, तदनुसार अक्षरांचा फेर फार, व (११८)
सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून, तो व (१२०) किंवा
(१२१) या सारणी कोष्टकांस न्याय्यप्रमाणें रूप देऊन खालीं लि
हिल्याप्रमाणें निघेल.

ला स्प कु = ला कोस्प अ + १० - ला को घ - - - - - - - (१४२)

ला को (क - कु) = ला स्प घ + ला को कु - ला स्प ख - - - (१४३)

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची उजवी बाजू (क) आ
णि (कु) यांचें अंतर दाखविल्ये. या करितां (अ) आणि (ब)
कोन बराबर असतील; तेव्हां (क) कोन (कु) आणि (क-कु)
यांचा बेरजे बराबर होईल. अथवा लहान मोठे असल्यां
स (क) कोन (कु) आणि (क-कु) यांची वजावाकी दाखवील.

यथीं विशेष विस्तार (७९) कलमांत पहावा.

सहावा सिद्धांत.

दोन कोन आणि त्यांतून एका कोनासमोरील बाजू दिली असतां.

६५ जेव्हां (अ) आणि (ब) हे दोन कोन व त्यांतील एकाचा समोरची (७) बाजू सांगितली आहे; तेव्हां दुसऱ्या कोनास मोरील, (घ) बाजू (९४) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न झालेलीं जीं तीन समीकरणें त्यांतील पहिल्याचा आधारानें निघते.

लाभुघ = लांभुछं + लाभुब - लाभुअ - - - - - - (१४४)

याप्रमाणें (घ) बाजू समजल्यावर (न) बाजू व (क) कोन (१३८) आणि (१३९) सारणी कोष्टकांपासून कळतील.

जर (ब) कोन संदिग्ध नसेल तर त्याज विषयीं विचार.

जेव्हां दिलेल्या दोन कोनांची बेरीज (१८०) हून कमी असेल; तेव्हां लहान कोनासमोरील बाजू लघु ह्मणजे (९०°) हून कमी होईल. आणि जर त्या दिलेल्या कोनांची बेरीज (१८०°) हून अधिक असेल; तर मोठ्या कोनासमोरील बाजू विशाळ ह्मणजे (९०°) हून अधिक होईल. आणि ती बेरीज जर (१८०°) च असेल; तर त्यांचा समोरील बाजूंची बेरीज तितकेंच ह्मणजे (१८०°) होईल.

६६ परंतु जर प्रथम (क) कोनच काढणें असेल तर (१३८)

व (११६) या सारणी कोष्टकांत (६२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें कारण पडेल, तदनुसार अक्षरांचा फेरफार व (११८) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो व (११९) या सारणी कोष्टकास लाग्रतमाचें रूप देऊन खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल.

लास्पकु = लाकोस्पब+१०-लाकोक्ष - - - - - - (१४५).
लाभु(क-कु) = लाभुकु+लाकोअ-लाकोब - - - - (१४६)

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची ऊर्ध्वी बाजू (क) आणि (कु) यांचें अंतर दाखवितें. याज करितां (क्ष) आणि (ब) या बाजू बराबर किंवा न्यूनाधिक असतील; त्या प्रमाणें (कु) व (क-कु) हे बराबर किंवा न्यूनाधिक होतील. तसेंच (अ) आणि (ब) हे कोन बराबर अथवा न्यूनाधिक असतील; तदनुसार (कु) व (क-कु) यांची बेरीज किंवा वजाबाकी दाखवील.

६७ परंतु जर प्रथम सांगितल्या दोन कोनांमधील (क्ष) अंतर बाजूच काढणें असेल, तर (११५) आणि (११७) या सारणी कोष्टकांत (६२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें गरज लागेल; त्या प्रमाणें अक्षरांचा फेरफार व (११५) सारणी कोष्टकांत त्रिज्येची योजना करून तो व (११७) या सारणी को

ष्टकास लाग्नतमाचें रूप देऊन खालीं लिहिल्याप्रमाणें निघते.

लास्प१ = लास्पछ + लाकोब - १० - - - - - - - - - - (१४७)

लाभु(म-१) = लाभु१ + लास्पब - लास्पअ - - - - (१४८)

आतां या दुसऱ्या सारणी कोष्टकाची उजवी बाजू (म) आणि (१) यांचें अंतर दाखवितें. याजकरितां (छ) आणि (घ) या बाजू बराबर किंवा न्यूनाधिक असतील, त्याप्रमाणें (१) आणि (म-१) हे खंड बराबर किंवा लहान मोठे होतील तसेंच (अ) आणि (ब) हे कोन बराबर किंवा कमजास्ती असतील; तदनुसार (म) बाजू (१) व (म-१) यांची बेरीज अथवा वजाबाकी दाखवील.

काटकोन त्रिकोणां विषयीं विचार.

६८ वरील सहा सिद्धांतांत सिद्ध केल्या सारणी कोष्टकांपेक्षां काटकोन त्रिकोणाचीं उदाहरणें (११२), (११३) आणि (११४) या सारणी कोष्टकांपासून अधिक सुलभ रितीनें होतात.

आतां (४५) कलमांतील (अबक) या काटकोन त्रिकोणांत (क) कोन काटकोन आहे; तो मनांतन आणि ती बाकीच्या पांच अवयवांकडे लक्ष देऊन वर सांगितलेले तीन सारणी कोष्टक लावून पहातां कळून येतें कीं, या तीन सारणी कोष्टकांतील पहिल्या उद्देशकांची ह्मणजे त्रिकोणा

चा एक एक अवयवाची स्थिति, दुसऱ्या उद्देशकांतील त्याच त्रिकोणाचे जे दोन अवयव, वरील आकृतींत आहेत, त्यांचा मध्यें आहे. तसेंच दुसऱ्या उद्देशकांतील अवयव, पहिल्या उद्देशकांतील अवयवांस, तिसऱ्या उद्देशकांतील अवयवां पासून वियुक्त करितात. याच प्रमाणें आणखी करून येतें कीं, या सारणी कोष्टकाच्या प्रथम उद्देशकांत एक (पाय) याची भुजज्या, आणि दुसऱ्या भागांचा कोभुजज्या, आहेत. व दुसऱ्या उद्देशकांत एक (पाय) याची स्पर्शरेषा, व दुसऱ्या भागांच्या कोस्पर्शरेषा, आहेत. तसेंच तिसऱ्या उद्देशकांत (पाय) यांचा कोभुजज्या, आणि इतर भागांचा भुजज्या आहेत. आतां पहिल्या उद्देशकांत त्रिज्येची योजना केली असतां पुढें सांगितलेली साधारण रीति उत्पन्न होत्ये. तेणें करून सुलभ रितीनें काटकोन त्रिकोणाचे सर्व अवयव निघतात.

काटकोन त्रिकोणाचे दिलेले दोन अवयव आणि काढावयाचा अवयव मिळून जे तीन अवयव, त्यांतून जो अवयव दुसऱ्या दोन अवयवां जवळ (दोहींसही लागलेला) असेल, अथवा पूर्वोक्त तीन अवयवांतील दोन अवयवांस, जो वियुक्त करित असेल; त्यास मधील अवयव असें म्हणावें. आणि व

र सांगितल्या तीन अवयवां शिवाय राहिलेले जे दोन अवयव त्यांस दुरचे अवयव ह्मणावें. व जे मधील अवयवास लागलेले असतील, त्यांस जवळील अवयव ह्मणावें.

६९ पुढल्या कलमांत लिहिलेली रीति खेरीज करून, त्रिज्या आणि मधील अवयवाची कोभुजज्या, यांचा काटकोन चौकोन, जवळचा अवयवांचा कोस्पर्श रेषांचा काटकोन चौकोना बरोबर आहे. किंवा दुरचा अवयवांच्या भुजज्यांचा काटकोन चौकोना बराबर आहे.

७० वरचा कलमांत त्रिज्या आणि मधील अवयवाची कोभुजज्या, यांची काटकोन चौकोन, जवळचा अवयवांचा कोस्पर्श रेषांचा, किंवा दुरचा अवयवांचा भुजज्यांचा काटकोन चौकोना बराबर आहे असें लिहिलें; परंतु त्या अवयवांत जर (पाय असतील तर त्यांचा कोभुजज्या, कोस्पर्श रेषा आणि भुजज्या यांचा बदली अनुक्रमें भुजज्या, स्पर्श रेषा आणि कोभुजज्या, घेतल्या पाहिजेत.

७१ वरील महाल्या सिद्धांतावरून असें सिद्ध होतें कीं, जे दोन दिलेल्या भागांत एक (पाय) आणि त्याचा समोरील कोन असेल, तर त्याचीं दुसरीं फलें संदिग्ध येतील.

कित्येक ठिकाणीं कादावयाचा जो भाग त्याचा निश्चय

त्याचा कोभुजज्या, स्पर्शरेषा, किंवा कोस्पर्शरेषा यांचा अधिक किंवा उण्या चिन्हांवरून अथवा सहाव्या सिद्धांतापासून—(पाय) आणि त्यांचा समोरील कोन बराबर आहेत; असें कळतें; तेणेंकरून ही होईल·

७२ जा त्रिकोणाची एक बाजू (क्वाड्रंट) ह्मणजे (९०) आहे; त्याला वृत्तपाद त्रिकोण असें ह्मणतात· जेव्हां या जातीचा त्रिकोणास साधारण सारणी कोष्टक लावावे; तेव्हां ते काटकोन त्रिकोणास लाविल्यानें जसे सुलभ होतात. तसेच सुलभ होऊन, त्याचा पृथक्करणार्थ वर काटकोन त्रिकोणा विषयीं जशी (११२), (११३) आणि (११४) या सारणी कोष्टकांनीं रीति दाखविली; त्या प्रमाणें रीति निघेल· परंतु असे त्रिकोण बहुत करून पहाण्यांत किंवा उपयोगांतही नाहींत याजकरितां याज विषयीं एकादि रीति सिद्ध करण्याची गरज नाहीं· असें असून गरज लागल्यास काटकोन त्रिकोणापासून दिलेले दोन भाग व काढावयाचा भाग याचा संबंध दाखविणारा सारणी कोष्टक सिद्ध करितां येईल· नंतर त्या

† (क्वाड्रंट) ह्मणजे वर्तुळपाद याजकरितां जा त्रिकोणाची एक बाजू (९०) अंश असल्ये; त्यास (क्वाडंट) त्रिकोण असें ह्मणतात· हें नाव बाजूवरून पडलें आहे·

कोष्टकांत समोरील कोनांचा ठिकाणीं बाजू आणि बाजूंचा ठिकाणीं कोन असे फेरफार करावे. आणि को भुजज्या, स्पर्शरेषा आणि को स्पर्शरेषा यांस ऋण चिन्हें जोडावीं. ह्मणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें इच्छिल्या कामास उपयोगी सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

जर (४५) कलमांतील आकृतींत (म) बाजू हा एकवर्तुळपाद कोंसमानिला, आणि (अ), (ब) दुसरे कोन दिले आहेत; त्यांपासून (म) बाजू समोरील कोन काढणें आहे; तेव्हां जा त्रिकोणांत (क) कोन काटकोन आहे; त्यांत (ष), (घ), (म) या तीन बाजू मनांत आणिल्या असतां, (को म = को ष. को घ) आतां या समीकरणांत (काटकोन) त्रिकोणाकरितां वर लिहिल्या प्रमाणें अक्षरांचा फेरफार करून (- को क = को अ. को ब) किंवा (+ को क = - को अ. को ब) असें होतें. परंतु जेव्हां या जातीचा त्रिकोणाचे अवयव काढावयाचे आहेत; तेव्हां (४१) कलमांत सपूमेंटा विषयीं विचार सांगितला आहे; तेणें करून सुलभ रितीनें निघतील. अथवा याचें पृथक्करण दुसरां एक गोलीय काटकोन त्रिकोण आहे; त्याचा अवयवांचें पृथक्करण वर लिहिल्या त्रिकोणाचा जातीचा सर्व अवयवांशीं सादृश्य आहे.

आतां (न्न) आणि (घ) यांची बेरीज व वजाबाकी यांचीं प्रत्येकीं अर्धे करून $\frac{१}{२}$(न्न+घ) = ९३° ३४′ व $\frac{१}{२}$(न्न-घ) = ४७° ४३′ आणि ($\frac{१}{२}$अ) = २१° २१′ ३०″ आहे. याजकरितां अव्यक्त अवयव (१२९) आणि (१३०) या सारणीं कोष्टकां पासून निघतात.

लास्प $\frac{१}{२}$(क+ब) = लाकोस्प $\frac{१}{२}$अ + लाको $\frac{१}{२}$(न्न-घ) - लाको $\frac{१}{२}$(न्न+घ)

लास्प $\frac{१}{२}$(क-ब) = लाकोस्प $\frac{१}{२}$अ + लाभु $\frac{१}{२}$(न्न-घ) - लाभु $\frac{१}{२}$(न्न+घ)

या प्रमाणें $\frac{१}{२}$(क+ब) = ९२° ४′ १५″ ही आणि $\frac{१}{२}$(क-ब) = ६२° ११′ १५″ ही किंमत निघत्ये. आतां यांची बेरीज व वजाबाकी करून, क = १५४° १५′ ३०″; ब = २९° ५३′ आहेत. आतां (७) बाजू काढणें ती (१३१) व (१३२) सारणी कोष्टकांपासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघत्ये.

लास्प ७ = लास्प घ + लाको अ - १०

लाको ७ = लाको घ + लाको (न्न-७) - लाको ७

यातील प्रथम समीकरणापासून, ७ = ३७° ७′ १५″ ही आलेली किंमत (न्न) यांतून वजा करून (न्न-७) = १०४° १′ ४५″ ही आहे म्हणून दुसऱ्या समीकरणापासून ७ = १०२° २०′ ३०″ आहे. अथवा (७) बाजू (१३१) आणि (१३२) या सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करून खालीं लिहिल्या प्रमाणेंही

निघत्ये

लास्प ϕ = लास्पम + लाकोअ − १०

लाको ७ = लाकोम + लाको (घ − ϕ) − लाको ϕ

यापासून ϕ = १४° ३′ १५″, (घ − ϕ) = −१०° ३९′ १५″ आहे; झणून ७ = १०° २′ ३″ ही पूर्वी प्रमाणेंच किंमत आहे.

जेव्हां ∠ब आणि ∠क, (७५) कलमा प्रमाणें आहेत; तेव्हां (७) (६५) कलमांतील सहाव्या सिद्धांता प्रमाणें खालीं लिहिल्या सारणी कोष्टकांतून कोणत्या ही सारणी कोष्टका पासून निघेल.

लाभु ७ = लाभुअ + लाभुघ − लाभुब, यांत अक्षरांचा फेरफार करून, लाभु ७ = लाभुअ + लाभुम − लाभुक

जेव्हां या समीकरणापासून (७) बाजूची किंमत बराबर कळत नाहीं; तेव्हां ती (१३३) व (१३४) या सारणी कोष्टकांपासून उत्पन्न झालेलीं, जीं पुढील समीकरणें तीं कामांत घेतल्यानें निघेल.

लास्प $\frac{1}{2}$ ७ = लास्प $\frac{1}{2}$ (म + घ) + लाको $\frac{1}{2}$ (क + ब) − लाको $\frac{1}{2}$ (क − ब).

लास्प $\frac{1}{2}$ ७ = लास्प $\frac{1}{2}$ (म − घ) + लाभु $\frac{1}{2}$ (क + ब) − लाभु $\frac{1}{2}$ (क − ब)

---

७६ चौथें, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

हे कोन अक्षरांचा फेरफार केला असतां निघतात.

---

७४ दुसरें, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

अ = १३९° २७'
ब = ५३° ३९' } यांपासून तीनही बाजू काढ़ा?
क = ३४° ५'

आतां यां तीन कोनांची बेरीज २२७° ११' आहे. इचें अर्ध ११३° ३५' ३०" = स, आणि या अर्धांतून तीन ही बाजू प्रत्येकीं वजा करून बाक्या, (स-अ) = -२५° ५१' ३०" व (स-ब) = ५९° ५६' ३०" आणि (स-क) = ७९° ३०' ३०" आहेत. याजकरितां (ज), (घ), (म) बाजू (१०४), (१०५), (१०६) आणि (१०७) यांतील कोणत्याही सारणी कोष्टकास त्रिज्या गुणक लावित्यापासून निघतात.

भुअ = १३९° २७' ...... लाग्र ९.८१२९८८
भुब = ५३° ३९' ९.९०६०१८
भुक = ३४° ५' ९.७४८४९७
को(स-अ) = -२५° ५१' ३०" ९.९५४१८२
को(स-ब) = ५९° ५६' ३०" ९.६९९७३५
को(स-क) = ७९° ३०' ३०" ९.२६०२९२

आतां (१०५) सारणा कोष्टकापासून खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल.

को(स−ब) = ५९° ५६′ ३″ ९.६९९७३५
को(स−क) = ७१° ३′ ३″ ९.२६०२९२

२० ....

भुब = ५३° ३१′ ९.९०६०१८
भुक = ३४° ५′ ९.७४८४९७

२) ११.३०५५१२
९.६५२७५६

को $\frac{1}{2}$ छ = ६३° १७′ १२″ ....
∴ छ = १२६° ३४′ २४″ आहे हें उत्तर.

याच प्रमाणें वर लिहिल्या सारणी कोष्टकांत (छ) चा ठिकाणीं अनुक्रमें (घ) आणि (म्न) असा फेरफार करून.

को $\frac{1}{2}$ घ = ४७° ५३′ ९.८२६४९४
∴ घ = ९५° ४६′ आहे हें उत्तर.
को $\frac{1}{2}$ म्न = २१° ५४′ १९″ ९.९६७४५५
∴ म्न = ४३° ४८′ ३८″ हें उत्तर.

---

७५ तिसरें, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

अ = ४२° ४३′
घ = ४६° ५१′
म्न = १४१° १७′

यांपासून राहिले, तीन अवयव काढ

पूर्वोक्त सहा सिद्धांतांचा बोध होण्याकरितां प्रत्ये
क सिद्धांताचें एकेक उदाहरण लिहितों

७३ प्रथम, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

ल = १००°
घ = ३७° १८′
न = ६२° ४६′

} यांपासून तीनही कोन काढा.

आतां तीन बाजूंची बेरीज २००° ४′ आहे. इचें अर्ध १००° २′ = ञ, आणि या अर्धांतून तीनही बाजू प्रत्येकीं वेजा करून बाक्या, (ञ-ल) = २′ व (ञ-घ) = ६२° ४४′ आणि (ञ-न) = ३७° १६′ आहेत. याजकरितां (अ) कोन (१२४) सारणी कोष्टकापासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल.

भुञ = १००° २′ ...... लाग्र ९.९९३३०७
भु(ञ-ल) = ०° २′ ६.७६४७५६
भु(ञ-घ) = ६२° ४४′ ९.९४८८४५
भु(ञ-न) = ३७° १६′ ९.७८२१३२

२) २२.९७२९१४

स्प ½ अ = ८८° ७′ ५३″ ११.४८६४५७

∠अ = १७६° १५′ ४६″ आहे.

आतां (१२५) आणि (१२६) या सारणी कोष्टकांपासून —

स्प $\frac{1}{2}$ अ + भु (अ-श) = ११·४८६४५७ + (९·७६४७५६)
= १८·२५१२१३ यांतून एकवेळ, भु(अ-घ) = ९·९४८८४५
हीव पुनः, भु(अ-म्न) = ९·७८२१३२ ही पृथक् पृथक् वजा करू
न, स्प $\frac{1}{2}$ ब = ८·३०२३६८ आणि स्प $\frac{1}{2}$ क = ८·४६९०८१ या बा
क्या रहातात. याजकरितां लाग्र तम कोष्टका पासून स्प $\frac{1}{2}$ ब
= १° ८′ ५७″ आणि स्प $\frac{1}{2}$ क = १° ४१′ १३″ निघतात. याची दु
पट करून ∠ब = २° १७′ ५४″, ∠क = ३° २२′ २६″ हें उत्तर.

अथवा याच उदाहरणांतील (अ) कोन (१२२) आणि (१२३) या सारणी कोष्टकांचा सहायें करून निघतो.

(१२२) याचा सहायानें.		(१२३) याचा सहायानें.	
भुघ = २७° १८′ लाग्र	९·७८२४६४	भुघ = २७° १८′ लाग्र	९·७८२४६४
भुम्न = ६२° ४६′ ······	९·९४८९७५	भुम्न = ६२° ४६′ ······	९·९४८९७५
भु(अ-घ) = ६२° ४४′ ···	९·९४८८४५	भुअ = १००° २′ ······	९·९९३३०७
भु(अ-म्न) = २७° १६′	९·७८२१३२	भु(अ-श) = २′ ······	६·७६४७५६
	२) १९·९९९५३८		२) १७·०२६६२४
भु $\frac{1}{2}$ अ = ८८° ८′ ···	९·९९९७६९	को $\frac{1}{2}$ अ = ८८° ७′ ५३″ ···	८·५१३३१२
∴ ∠अ = १७६° १६′ हें उत्तर.		∴ ∠अ = १७६° १५′ ४६″	

याच प्रमाणें या सारणी कोष्टकापासून (ब) आणि (क

$$\left\{\begin{array}{lll} ग & = & १००° \\ ब & = & २°\ १७'\ ५४'' \\ क & = & ३°\ २२'\ २६'' \end{array}\right\}$$ यांपासून राहिले, तीन अवयव काढ?

आतां (क) आणि (ब) यांची बेरीज व वजाबाकी यांचीं प्रत्येकीं अर्धें करून, $\frac{१}{२}$(क+ब) = २° ५०' १'' व $\frac{१}{२}$(क-ब) = ०° ३२' १६'' आणि $\frac{१}{२}$ग = ५०° आहे. याजकरितां अव्यक्त अवयव (१३३) आणि (१३४) या सारणी कोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करून निघतील.

को $\frac{१}{२}$(क+ब) = २° ५०' १'' ..... लाग्र ९.९९९४६३

को $\frac{१}{२}$(क-ब) = ०° ३२' १६'' ९.९९९९८०

भु $\frac{१}{२}$(क+ब) = २° ५०' १'' ८.६९४४२०

भु $\frac{१}{२}$(क-ब) = ०° ३२' १६'' ७.९७२४३३

स्प $\frac{१}{२}$ग = ५०° १०.०७६१८६

स्प $\frac{१}{२}$(म+घ) = ५०° २' ..... १०.०७६७०३ }

स्प $\frac{१}{२}$(म-घ) = १२° ४४' ..... ९.३५४१९९ }

म = ६२° ४६', घ = ३७° १८'. आतां (अ) कोन काढणें तो (१२४) सारणी कोष्टकापासून (७२) कलमांतील रीतीनें खालीं लिहिल्याप्रमाणें निघतो.

स्प $\frac{१}{२}$अ = ८८° ७' ५३''

∴ ∠अ = १७६° १५' ४६'' आहे. हें उत्तर.

७७ पांचवें; अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव·

$$\left\{\begin{array}{l} \text{छ} = ४६^{\circ}\ १६' \\ \text{घ} = ७३^{\circ}\ ८' \\ \text{अ} = ३^{\circ}\ ५४' \end{array}\right\}$$ यापासून राहिले अवयव काढ?

यां अवयवांपासून (ब) कोन (१३७) सारणीकोष्टकाचा सहायानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल·

लाभुब = लाभुघ + लाभुअ − लाभुछ

यापासून ∠ब = ५४° २७′ किंवा १२५° ३३′ ही किंमत निघत्ये· आतां या उदाहरणीं (६२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें दिलेल्या बाजूंची बेरीज (१८०°) हून उणी आहे, आणि लहान बाजू समोरील कोन सांगितला आहे; ते व्हां (ब) कोन संदिग्ध आहे, याजकरितां त्याची किंमत पांचव्या सिद्धांतरितीनें कळत नाहीं; ह्मणून (१३८) आणि (१३९) या सारणीकोष्टकांपासून जर (ब) कोनाबराबर ५४° २७′ धरिले, तर (म) = १००°. १६′ किंमत येत्ये· आणि ∠क = १२३° १३′ येत्ये, परंतु ∠ब = १२५° ३३′ धरिला, तर म = ३७° ४१′ आणि ∠क = ३१°· १९′ येतात· परंतु प्रथम (क) कोनच काढणें असेल, तर (१४२) आणि (१४३) सारणीकोष्टकांपासून खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघेल·

क्रू = ७३° १६′ १५″ आणि (क - क्रू) = ४५° ५७′ आहेत. आतां जापेक्षां हें उदाहरण संदिग्ध आहे, त्यापेक्षां (क) कोन, कु आणि (क - कु) यांचा बेरजे बराबर किंवा वजाबाकी बराबर असेल, ह्मणून तो वर सांगितल्या प्रमाणें निघेल. तसेंच (भ) बाजू पांचव्या सिद्धांतांतील (६३) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें काढितां येईल.

---

७८ सहावें, अबक त्रिकोणांत सांगितले अवयव.

$$\left\{\begin{array}{l} क = ९०° \\ थ = १३२° ४′ \\ अ = १११° ३७′ \end{array}\right\}$$ यांपासून राहिले अवयव काढ?

या अवयवांपासून (भ) कर्ण काढणें आहे; तेव्हां (थ) बाजूमधील अवयव आणि (अ), (भ) हे दुरचे अवयव आहेत; याजकरितां तो (६९) व (७०) कलमांत सांगितल्या रितीनें खालीं लिहिल्या प्रमाणें निघतो.

र. भुथ = भुअ. भुभ, स्थलांतरानें व लाग्रतम रुपानें लिहून, लाभुभ = लाभुथ + १० - लाभुअ, आतां महाव्या सिद्धांताचा (६५) कलमांतील रितीप्रमाणें.

भ = ५१° ४८′ किंवा १२८° १२′ आहेत.

आतां (घ) हा मधील अवयव काढणें आहे; आणि (छ) व (अ) हे दुरचे अवयव आहेत; ह्मणून (६९) व (७०) कलमांतील काटकोन त्रिकोणाच्या रितीप्रमाणें

∴ र·भुघ = स्प छ · को स्प अ, गुणक सोडवून, व लाग्रनमाचें रूप देऊन, ला भुघ = ला स्प छ + ला को स्प अ − १०, यापासून घ = २५° ५′ किंवा १५४ ५५′ किंमत निघते·

याचप्रमाणें (ब) कोन काढणें आहे; तेव्हां (अ) मधील आणि (छ) व (ब) हे दुरचे अवयव आहेत; याजकरितां वर सांगितल्या (६९) व (७०) कलमांपासून, ∠ब खालीं लिहिल्याप्रमाणें निघेल·

र·कोअ = भुब · को छ, गुणक सोडवून व लाग्रनमाचें रूप देऊन, ला भुब = ला को अ + १० − ला को छ, यापासून ∠ब = ३२° ३९′ किंवा १४७° २१′ या प्रमाणें तीनहीं, अव्यक्त अवयव निघतात·

दुसरीं कित्येक उदाहरणें.

(१) छ = ५६° १७′, घ = १४७° ३३′, न = ११२° ४८′ — उत्तर: अ = ६२° ३२′, ब = १४५° ५′, क = ७९° ३३′

(२) अ = ४७° ९′, ब = १३६° ४१′, क = ८८° ३४′ — उत्तर: छ = १६° २४′, घ = १६४° ३६′, न = १५७° २२′

(३) छ = ७८° ४१′, घ = १५३° ३०′, क = १४०° २२′ — उत्तर: अ = १३३° १५′, ब = १६° ३९′, म = १२०° ५०′

(४) छ = ७१° ४५′, ब = १०४° ५′, क = ८२° १८′ — उत्तर: अ = ७०° ३१′५, घ = १०२° १७′, म = ८६° ४१′

(५) छ = १३६° २५′, म = १२५° ४०′, क = १००° — उत्तर: अ = १२३° १९′, ब = ६२° ६′, घ = ४६° ४८′

(६) ब = ५६° १७′, छ = ११५° २८′, घ = ६०° २९′ — उत्तर: अ = ५९° ३९′, क = १७२° ४३′, म = १७२° २३′ अथवा अ = १२०° २१′, क = ७२° ५२′, म = ८९° ५३′

(७) अ = १०३° १६′, ब = ७६° ४४′, घ = ३° ७′ — उत्तर: छ = १४९° ५३′*, म = १६४° ५०′, क = १४९° २०′

---

* जे कां दिलेल्या कोनांची बेरीज (१८०°) असेल, ते कांस हा व्यासि

(८) घ = १२४° ५३′, म = ३१° १९′, ब = १६° २६′ — उत्तर: छ = १५५° ३५′ $\frac{१}{२}$, क = १०° ११′ $\frac{१}{२}$, अ = १७१° ४८′ $\frac{१}{२}$

(९) घ = १४३° ५४′, ब = १४६° १२′, क = ४०° ४०′ — उत्तर: छ = ११२° ३९′, म = ४३° ३९′, अ = ६०° ३७′; अथवा छ = ९° २७′, म = १३६° २१′, अ = ८° ५६′

(१०) अ = ९०°, ब = ९५° ६′, क = ७१° ३६′ — उत्तर: छ = ९१° ४२′, घ = ९५° २२′ $\frac{१}{२}$, म = ७१° ३१′ $\frac{१}{२}$

(११) अ = ७५° ३६′, ब = ९०°, छ = ६४° ३′ — उत्तर: म = ३१° ५१′, घ = ६८° १०′ $\frac{१}{२}$, क = ३४° ३८′; अथवा म = १४८° ९′, घ = १११° ४९′ $\frac{१}{२}$, क = १४५° २२′

ह्यांताचा लपशीला प्रमाणेंहें उदाहरण वजाबाकी करून होईल.

प्रश्न	दत्त		उत्तर
(१२)	छ = ५३° ११′ घ = ३५° २३′ क = ९०°	उत्तर	अ = ६६° ४०′ ब = ४१° ३२′ म = ६०° ५१′
(१३)	छ = ३०° घ = ४०° म = ५०°	उत्तर	अ = ४०° ३९′ ब = ५६° ५२′ क = ९३° ४१′
(१४)	छ = ३° घ = ४° म = ५°	उत्तर	अ = ३६° ५४′ ब = ५३° १०′ क = ९०° २′
(१५)	छ = ६०° घ = ८०° म = १००°	उत्तर	अ = ५६° ५२′ ब = ७२° १३′ क = १०७° ४७′
(१६)	अ = ३२° २६′ ६″ ३/२ ब = १३०° ५′ २२″ छ = ४४° १३′ ४२″	उत्तर	घ = ८४° १४′ २९″ म = ५१° ६′ १२″ क = २६° ४५′ २८″
(१७)	छ = ४०° १८′ २९″ घ = ६७° १४′ २८″ अ = ३४° २२′ १७″	उत्तर	ब = ५३° २५′ १५″ क = ११९° १२′ ३९″ म = ८९° ५७′ ६″

भाग चौथा.

गोलीय त्रिकोण संबंधी अनेक प्रकारच्या सिद्धता.

७९. आतां (५७) कलमांतील विशाळ कोन त्रिकोणाकृतींत (अबक) त्रिकोणाच्या तीन बाजूंपासून (अड) लंबानें झाले; जे पायाचे खंड ते कोनांच्या सहाया शिवायही, पुढीलरितीनें निघतात. आतां (कड) = प आहे; याजकरितां (५८) कलमांतील (११६) सारणी कोष्टकाचीं पदें प्रमाणांत लिहून,

को(श-प) : को प : : को म : को घ हें मिश्र प्रमाणानें लिहिल्यास,

को(श-प)+को प : को(श-प)-को प : : को म+को घ : को म-को घ असें होतें. आतां उपाग्र सरांस अग्र सरांनीं भागून,

$$\frac{\text{को}(श-प)-\text{को}प}{\text{को}(श-प)+\text{को}प}=\frac{\text{को}म-\text{को}घ}{\text{को}म+\text{को}घ}$$

आतां या समीकरणापासून (२५) सारणी कोष्टक आणि (९) सारणी कोष्टकावरील टीप यांच्या सहायानें खालीं लिहिलें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतें.

स्प $\frac{1}{2}$श · स्प(प-$\frac{1}{2}$श) = स्प$\frac{1}{2}$(घ+म) · स्प$\frac{1}{2}$(घ-म) ···(१४०)

या सारणी कोष्टकांतील पदें प्रमाणांत लिहून,

स्प$\frac{1}{2}$श : स्प$\frac{1}{2}$(घ+म) : : स्प$\frac{1}{2}$(घ-म) : स्प(प-$\frac{1}{2}$श)

आतां (प-$\frac{1}{2}$श) हा (बक) बाजूच्या मधील बिंदूपासून (ड) पर्यंत अंतर दाखवितो; आणि हा त्याच्या स्पर्शरेषेनें कळतो; म्ह

णून तो संदिग्ध नसेल, तर (२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें ($\frac{भु}{को}$ = स्प) इत्यादि मनांत आणून (पहिल्या किंवा तिसऱ्या वर्तुळपादांत घेतां येईल. आणि संदिग्ध असेल, तर दुसऱ्या किंवा चौथ्या वर्तुळपादांत घेतां येईल. या प्रमाणें दोन किमती निघाल्या वर जा दोन स्थलीं (ब क) कोंसास लंब छेदितो; ते दोन बिंदु करतील*) आणि हे खंड लंबाचा दोहों तील कोणताही एक भाग त्रिकोणाच्या आंत पडतो, किंवा नाहीं हें दाखवितात. या प्रमाणेंपायाचे खंड कळल्यावर (अडब) व (अडक) या कांटकोन त्रिकोणांचे कोन काढितां येतील. आणि या प्रमाणें तिसऱ्या भागांत सांगितल्या रिती शिवाय, ही निराळी रीति प्रथम सिद्धांताचीं उदाहरणें करावयास उत्पन्न झाली.

८० आतां ∠क अड = क आहे, या जकरितां (५१) कलमांतील (११९) सारणी कोष्टकाचीं पदें प्रमाणांत लिहून,

भुक : भु(अक) : : कोक : कोब, हें मिश्र प्रमाणानें व भागाकारानें आणि (२४), (२५) सारणी कोष्टकांचा व पांचव्या सारणी कोष्टका

---

* ते दोन बिंदु असे मनांत आणिले पाहिजेत, कीं, (ब क) हा कोंस पूर्ण वर्तुळ होई पर्यंत वाढविला. तसाच (अड) लंब ही, पूर्ण वर्तुळ होई पर्यंत वाढविला; म्हणजे त्या लंबानें (ब क) वृत्तास दोन छेदन बिंदु होतात. आणि प्रथम तिसरा वर्तुळपाद म्हटला आहे; तो याच पूर्ण वृत्तें करून होतो.

वर्गलटीप, यांचा सहायानें खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतें.

$$\text{को स्प } \tfrac{1}{2}\text{अ} \cdot \text{स्प}(\text{क्ष} - \tfrac{1}{2}\text{अ}) = \text{स्प } \tfrac{1}{2}(\text{ब}+\text{क}) \cdot \text{स्प}(\text{ब}-\text{क}) \quad \cdots (१५०)$$

येथें (क्ष−½अ) हा अंतर कोन लंब आणि (अ) कोन दुभागणारी रेषा यांमध्यें झाला आहे; आणि कोनांचा निरनिराळ्या बाजूसंबंधी विवरण वरील कलमाचा शेवटीं लिहिल्या प्रमाणें आहे; या जकरितां, ही दुसरी एक रीति दुसऱ्या सिद्धांताचीं उदाहरणें करण्यास उत्पन्न झाली.

८१. आता (५२) कलमांतील (१२०) सारणीकोष्टकाचीं पदें प्रमाणांत लिहून,

को(अ−क्ष) : को क्ष :: स्प घ : स्प न, हें मिश्र प्रमाणानें लिहून, व उपाग्रसरांस अग्रसरांनीं भागिल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{को}(\text{अ}-\text{क्ष}) - \text{को क्ष}}{\text{को}(\text{अ}-\text{क्ष}) + \text{को क्ष}} = \frac{\text{स्प घ} - \text{स्प न}}{\text{स्प घ} + \text{स्प न}}$$

या समीकरणाचा दुसऱ्या उद्देशकांतील अंश आणि छेद यांस (को घ · को न) यानें गुणून व प्रथम बाजूंत (२५) आणि दुसऱ्या बाजूंत (१३); (१२) सारणीकोष्टका प्रमाणें किंमत ठेवून,

$$\frac{\text{स्प}(\text{क्ष} - \tfrac{1}{2}\text{अ})}{\text{को स्प } \tfrac{1}{2}\text{अ}} = \frac{\text{भु}(\text{घ}-\text{न})}{\text{भु}(\text{घ}+\text{न})} \quad \cdots (१५१)$$

या सारणीकोष्टकापासून लंब आणि (अ) कोन दुभागणारी रेषा यांचामधील कोनाचा सुलभ रितीनें निश्चय करितां येतो; याज

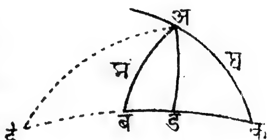
करितां (अबड) आणि (अकड) या दोन काटकोन त्रिकोणांच्या योगानें, ही दुसरी एकरीति तिसऱ्या सिद्धांताचीं उदाहरणें करावयास उत्पन्न झाली.

८२ आतां (४९) कलमांतील (११७) या सारणीकोष्टकाचीं पदें प्रमाणांत लिहून,

भु१ : भु(७-१) :: स्प ब : स्पक, या वरच्या कलमा प्रमाणें संस्कार देऊन, खालीं लिहिलेला सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{स्प(१-\frac{१}{२}७)}{स्प\frac{१}{२}७} = \frac{भु(ब-क)}{भु(ब+क)} \quad \ldots\ldots (१५२)$$

ही दुसरी एकरीति चौथ्या सिद्धांताचीं उदाहरणें करावयास उत्पन्न झाली.



८३ या आकृतींत (अ) कोन दुभाग करणारा (अड) कौंस कर आणि (कड) = घे, व (बड) = मे, घे तेव्हां (३७) कलमांतील (९४) सारणीकोष्टका प्रमाणें

$$\frac{भुघ}{भुघे} = \frac{भु\angle अडक}{भु\frac{१}{२}\angle अ}, \quad आणि \quad \frac{भुम}{भुमे} = \frac{भु\angle अडब}{भु\frac{१}{२}\angle अ},$$ आहे परंतु (४) कलमा प्रमाणें, भु∠अडब = भु∠अडक आहे; म्हणून

$$\frac{भुघ}{भुघे} = \frac{भुम}{भुमे} \text{ याजकरितां } \frac{भुघ}{भुम} = \frac{भुघे}{भुमे} \quad \ldots\ldots (१५३)$$

या सारणीकोष्टकांतील पदें प्रमाणांत आहेत; म्हणून जेव्हां बाजू दिल्या आहेत; तेव्हां हा कोष्टक मिश्र प्रमाण आणि भागाकार

व (२४) सारणीकोष्टक यांचा सहायानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें बाजूंचे खंड काढाव याचा उपयोगी पडतो.

$$\frac{\text{स्प}\frac{1}{2}(\text{घ}-\text{म})}{\text{स्प}\frac{1}{2}(\text{घ}+\text{म})}=\frac{\text{स्प}\frac{1}{2}(\text{घं}-\text{मं})}{\text{स्प}\frac{1}{2}\text{ळ}} \quad \ldots\ldots (१५४)$$

८४ आतां (अ) कोनापासून (घ) बाजू पुढें वाढविल्यानें बाहेर जो कोन होतो, तो (बक) वाढविलेल्या पायास (डं) स्थलीं मिळे, अशा महद्वृत्तानें दुभांग, आणि (कडं) = घं, व (बडं) = मं, घे. आतां बाहेरील कोनाचें अर्ध ($\frac{1}{2}$अ) चा कांपूमेंट आहे; याजकरितां (३७) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टका प्रमाणें

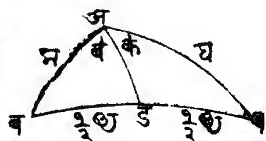
$$\frac{\text{भु घ}}{\text{भु घं}}=\frac{\text{भु डं}}{\text{को}\frac{1}{2}\angle\text{अ}}, \text{ आणि } \frac{\text{भु म}}{\text{भु मं}}=\frac{\text{भु डं}}{\text{को}\frac{1}{2}\angle\text{अ}} \text{ आहे.}$$

$$\therefore \frac{\text{भु घ}}{\text{भु घं}}=\frac{\text{भु म}}{\text{भु मं}}, \text{ याजकरितां } \frac{\text{भु घ}}{\text{भु म}}=\frac{\text{भु घं}}{\text{भु मं}} \quad \ldots (१५५)$$

यापासून वरील कलमांत लिहिल्या प्रमाणें पुढील सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{\text{स्प}\frac{1}{2}(\text{घ}-\text{म})}{\text{स्प}\frac{1}{2}(\text{घ}+\text{म})}=\frac{\text{स्प}\frac{1}{2}\text{ळ}}{\text{स्प}\frac{1}{2}(\text{घं}+\text{मं})} \quad \ldots\ldots (१५६)$$

८५ या आकृतींत कोणत्याही (बक) बाजूस दुभागणारा (अड) कोंस कर. आणि ∠बअड = बे, व ∠कअड = के, घे. आतां (३७) कलमांतील (९४) सारणीकोष्टकाचा सहायानें खाली



लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{भुघ्न}{भु\frac{१}{२}ळ} = \frac{भु\angle अडब}{भुब} \text{ , आणि } \frac{भुघ}{भु\frac{१}{२}ळ} = \frac{भु\angle अडक}{भुक}$$

या दोन समीकरणांतील दुसऱ्यास प्रथमानें भाग. आतां (४) कलमा प्रमाणें (भु∠अडब = भु∠अडक) आहे; ह्मणून खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{भुघ}{भुघ्न} = \frac{भुब}{भुक} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१५७)$$

या सारणी कोष्टका पासून (८२) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{स्प\frac{१}{२}(घ-घ्न)}{स्प\frac{१}{२}(घ+घ्न)} = \frac{स्प\frac{१}{२}(ब-क)}{स्प\frac{१}{२}\angle अ} \quad \cdots\cdots\cdots (१५८)$$

या भागांतील पांचही, कलमांत सिद्ध झालेले, सारणी कोष्टक—(अबक) त्रिकोणाच्या बाजू परस्परांस मिळे पर्यंत वाढविल्यानें जे त्रिकोण होतात; त्यांस लावावे; ह्मणजे (ळ, घ, घ्न) बाजू आणि (अ, ब, क) कोन एतद्वाचक अवयवांचा त्रिकोण आहे; तर हे सारिखे दिसून येतील.

८६ आतां (८८), (८९), (९०), (९३) आणि (१०४), (१०५) (१०६), (१०७) या सारणी कोष्टकां पासून पुढें दाखविल्या प्रमाणें घेतल्यास (घ, घ्न) आणि (ब, क) यांचा संबंध दाखविणारे संक्षिप्त सारणी कोष्टक उत्पन्न होतील.

$$\left.\begin{aligned} &\text{आतां } \sqrt{भुज्ञ\cdot भु(ज्ञ-ळ)\cdot भु(ज्ञ-घ)\cdot भु(ज्ञ-घ्न)} = र \\ &\text{आणि } \sqrt{-कोस\cdot को(स-अ)\cdot को(स-ब)\cdot को(स-क)} = न \end{aligned}\right\} \text{ घे.}$$

तर (८८) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणाऱ्या ज्या भु$\frac{1}{2}$अ, भु$\frac{1}{2}$ब, भु$\frac{1}{2}$क, यांचा किमती त्यांचा परस्पर गुणाकार करून, आणि प्रत्यक्ष वर्ग मूळ काढून, खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{क}=\frac{\text{भु(ञ-छ)}\cdot\text{भु(ञ-घ)}\cdot\text{भु(ञ-न)}}{\text{भुछ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}\quad\ldots(१५९)$$

या सारणी कोष्टकाचा उजव्या बाजूस $\frac{\text{भुञ}}{\text{भुञ}}$ यानें गुणून त्या गुणाकाराबरोबरील किंमत ठेविल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{क}=\frac{४}{\text{भुञ}\cdot\text{भुछ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}\quad\ldots\ldots(१६०)$$

८७ आतां (८९) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणाऱ्या ज्या को$\frac{1}{2}$अ इत्यादिकांचा किमती त्यांपासून वरचा कलमांतील रितीनें खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{को}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{क}=\frac{४\cdot\text{भुञ}}{\text{भुछ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}\quad\ldots\ldots(१६१)$$

८८ याच रितीनें (९०) सारणी कोष्टका प्रमाणें येणाऱ्या ज्या-स्प$\frac{1}{2}$अ, स्प$\frac{1}{2}$ब, स्प$\frac{1}{2}$क, यांचा किमती त्यांचा परस्पर गुणाकारापासून खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क}=\sqrt{\frac{\text{भु(ञ-छ)}\cdot\text{भु(ञ-घ)}\cdot\text{भु(ञ-न)}}{\text{भुञ}}}\quad\ldots(१६२)$$

या सारणी कोष्टकाचा उजव्या बाजूस $\sqrt{\left(\frac{\text{भुञ}}{\text{भुञ}}\right)}$ यानें गुणून, त्या गुणाकाराबरोबरील किंमत ठेविल्यानें खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क} = \frac{\text{न}}{\text{भुअ}} \quad \cdots\cdots (१६३)$$

८९ याच प्रमाणें (९३) सारणी कोष्टकापासून येणाऱ्या ज्या भुअ, भुब, भुक, यांच्या किमती त्यांचा परस्पर गुणाकार करून त्या गुणाकाराबरोबरील किंमत ठेविल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक} = \frac{८\text{न}^2}{\text{भुछ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}} \quad \cdots\cdots (१६४)$$

९० आतां वरील कलमा प्रमाणें (१०४), (१०५), (१०६) व (१०७) या सारणी कोष्टकां सारिख्या येणाऱ्या ज्या भु½छ, भु½घ, भु½न इत्यादिकांच्या किमती त्यांचा परस्पर गुणाकार करून त्या गुणाकारा बराबरील किंमत ठेविल्यानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{न} = \frac{-\text{न}^2\cdot\text{कोस}}{\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}} \quad \cdots\cdots (१६५)$$

$$\text{को}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{न} = \frac{\text{को}(\text{स}-\text{अ})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{ब})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{क})}{\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}} \quad \cdots (१६६)$$

$$\text{को}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{न} = \frac{\text{न}^2}{-\text{कोस}\cdot\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}} \quad \cdots\cdots (१६७)$$

$$\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{न} = \sqrt{\frac{-\text{कोस}}{\text{को}(\text{स}-\text{अ})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{ब})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{क})}} = \frac{\text{कोस}}{\text{न}} \quad \cdots (१$$

$$\text{भुछ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन} = \frac{८\text{न}^2}{\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}} \quad \cdots\cdots (१६९)$$

९१ आतां (१६४) आणि (१६०) या सारणी कोष्टकी पासून खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$\text{र} = \frac{1}{2}(\text{भुळ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}\cdot\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक})^{\frac{1}{3}}$ ...... (११०)

$\text{न} = \frac{1}{2}(\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}\cdot\text{भुळ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन})^{\frac{1}{3}}$ ...... (१११)

९२ वरचा कलमांतील प्रथम सारणी कोष्टकास दुसऱ्या सारणी कोष्टकानें भागून, व (१०७) सारणी कोष्टकाप्रमाणें येणाऱ्या जा भुळ, भुघ, भुन, यांचा किमती त्या प्रत्येक समीकरणाचा दोनही, बाजूंस भुअ, भुब, भुक, हे अनुक्रमें भाजक लावून; तीं तीनही, समीकरणें परस्पर गुणून, येणारें जें समीकरण त्याचा उजव्या बाजूबराबरील किंमत ठेवून, घनमूळ काढिलें असतां, तिसरा व चौथा आणि पांचवा हे उद्देशक, उत्पन्न होतात.

$\frac{\text{र}}{\text{न}} = \left(\frac{\text{भुळ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}{\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\text{भुळ}}{\text{भुअ}} = \frac{\text{भुघ}}{\text{भुब}} = \frac{\text{भुन}}{\text{भुक}}$ ... (११२)

हा (३७) कलमांतील (९४), सारणी कोष्टकाप्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न झाला; म्हणून खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल.

$\frac{\text{न}}{\text{भुअ}} = \frac{\text{र}}{\text{भुळ}}$, आणि $\frac{\text{न}}{\text{भुब}} = \frac{\text{र}}{\text{भुघ}}$, व $\frac{\text{न}}{\text{भुक}} = \frac{\text{र}}{\text{भुन}}$ .... (११३)

९३ आतां (९३) आणि (१०७) या सारणी कोष्टकांपासून खालीं लिहिल्याप्रमाणें समीकरणें उत्पन्न होतात.

$\frac{\text{भुअ}}{\text{भुळ}} = \frac{2\,\text{र}}{\text{भुळ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुन}}$, आणि $\frac{\text{भुळ}}{\text{भुअ}} = \frac{2\,\text{न}}{\text{भुअ}\cdot\text{भुब}\cdot\text{भुक}}$

या दोन समीकरणांतील प्रथम समीकरणाची डावी बाजू दुसऱ्या समीकरणाचा डाव्या बाजूचा व्युत्क्रम आहे; याजकरितां प्रथमाची उजवी बाजू दुसऱ्याचा उजव्या बाजूचा व्युत्क्रमाव

रावर लिहून आणि छेद सोडवून खालीं लिहिल्याप्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

४ ४न = भुछ·भुघ·भुम·भुअ·भुब·भुक . . . . (१७४)

९४ वरच्या कलमांतील सारणी कोष्टकांत (भुअ·भुब·भुक) याचा ठिकाणीं त्याची (१६४) सारणी कोष्टकांतील किंमत लिहून, भागाकारानें, खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$न = \frac{२४^{२}}{भुछ \cdot भुघ \cdot भुम} \qquad (१७५)$$

याच रितीनें (१७४) सारणी कोष्टकांत (भुछ·भुघ·भुम) याचा ठिकाणीं त्याची (१६१) सारणी कोष्टकांतील किंमत लिहून, भागाकारानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$४ = \frac{२न^{२}}{भुअ \cdot भुब \cdot भुक} \qquad (१७६$$

९५ आतां (९२) कलमा प्रमाणें $\frac{न^{२}}{भुब \cdot भुक}$ याचा बदल $\frac{४^{२}}{भुघ \cdot भुम}$ ही किंमत (१६७) सारणी कोष्टकांत लिहून आणि छेद सोडवून,

$$-कोस \cdot को\frac{१}{२}छ \cdot को\frac{१}{२}घ \cdot को\frac{१}{२}म \cdot भुअ \cdot भुघ \cdot भुम = ४^{२}$$

आतां (९३) सारणी कोष्टकाचे छेद सोडवून, उजव्या बाजूंत (८६) कलमांत सांगितलेली, किंमत ठेविल्यानें पुढील समीकरण उत्पन्न होतें.

$$भुघ \cdot भुम \cdot भुअ = २४$$

ही किंमत वरील समीकरणाच्या डाव्या बाजूंत लिहून, आणि

(२४·को $\frac{1}{2}$ छ·को $\frac{1}{2}$ घ·को $\frac{1}{2}$ म) यानें भागून, त्यांत (४) बरा बरील किमतींत ठेविली असतां, खालीं लिहिल्याप्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$-\text{कोस} = \frac{\sqrt{\text{भुञ}\cdot\text{भु}(\text{ञ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{ञ}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{ञ}-\text{म})}}{२\,\text{को}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}} = \frac{४}{२\,\text{को}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}} \quad \cdots\cdots (१७७)$$

१६ वरच्या कलमाप्रमाणेंच (१६०) सारणी कोष्टकापासून पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{भुञ} = \frac{\sqrt{-\text{कोस}\cdot\text{को}(\text{स}-\text{अ})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{ब})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{क})}}{२\,\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{क}} = \frac{\text{न}}{२\,\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{अ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{ब}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{क}} \quad \cdots\cdots (१७८)$$

(क्यागनोली) या विद्वानानें जो चमत्कारिक सारणी कोष्टक सिद्ध केला आहे; तो पुढें लिहिल्या रितीनें उत्पन्न होतो.

१७ आतां (८५) सारणी कोष्टकाचा उजव्या बाजूंतील पहिल्या पदास स्थलांतर करून, त्यास (कोअ) यानें गुणून, आणि त्या समीकरणाच्या दोनही बाजूंत (भुघ·भुम) हें मिळविलें, म्हणजे डाव्या बाजूंत (भुघ·भुम−भुघ·भुम·कोअ) हीं पदें येतील, त्यांच्या ठिकाणीं त्यांच्या बरोबरीचें (भुघ·भुम·भुअ) हें पद लिहिल्यानें खालीं लिहिल्याप्रमाणें समीकरण उत्पन्न होतें.

कोअ·कोछ+भुघ·भुम·भुंअ = भुघ·भुम+कोघ·कोम-कोअ··(ज)

याचरितीनें (१०१) सारणी कोष्टकापासून ही, पुढें लिहिल्याप्र माणें समीकरण उत्पन्न होतें.

कोअ·कोछ+भुब·भुक·भुंछ = भुब·भुक-कोब·कोक·कोछ

या समीकरणाच्या डाव्या बाजूतील दुसऱ्या पदांत (३१) कलमाचा शेवटील प्रथम, व दुसऱ्या समीकरणांतील, भुब·भुछ आणि, भुक·भुछ यांच्या बराबरील किमती ठेवून,

कोअ·कोछ+भुघ·भुम·भुंअ = भुब·भुक-कोब·कोक·कोछ

आतां याचीव (ज) समीकरणाची डावी बाजू एक सारिखी आहे; याजकरितां, उजव्या बाजू परस्पर बराबर लिहून,

भुघ·भुम+कोघ·कोम·कोअ = भुब·भुक-कोब·कोक·कोछ··(११९)

९८ आतां (८५) सारणी कोष्टकास (कोब·कोक) यानें व- (१०१) सारणी कोष्टकास (कोघ·कोम) यानें गुण; आणि त्या गुणिलेल्या दोन समीकरणांची बेरीज घेऊन स्थलांतर केल्यास पुढें लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

कोछ·कोब·कोक-कोअ·कोब·कोक·भुघ·भुम = -कोअ·कोघ·कोम
+कोछ·कोघ·कोम·भुब·भुक ··········(१२०)

आतां हाच (११९) आणि या जातीचे दुसरे सारणी कोष्टक किंवा समीकरणें यांमध्यें असा गुण आहे कीं, (छ) याचा ठिकाणीं

(ण-अ) व (घ) चा ठिकाणीं (ण-ब) इत्यादि किंमत ठेविली असतां, किंमतींत अंतर पडत नाहीं. याच प्रमाणें जे त्रिकोण एकमेकांचे सपूमेंटरी आहेत, त्या त्रिकोणांत वर लिहिल्या प्रमाणेंच होतें.

९९ आतां (८५) व (१०१) या सारणी कोष्टकांस (कोछ·भुब·भुक) व (कोअ·भुघ·भुम) यानीं अनुक्रमें गुणून त्या दोन समीकरणांची वजाबाकी घे; आणि त्या बाकीस (भुघ·भुम) यानें भाग; म्हणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$\frac{\text{कोछ·भुब·भुक}}{\text{भुघ·भुम}} - \text{कोअ} = \frac{\text{कोछ·कोघ·कोम·भुब·भुक}}{\text{भुघ·भुम}} + \text{कोअ·कोब·कोक}$$

यांत (०३७) कलमांतील (९४) सारणी कोष्टका प्रमाणें $\left(\frac{\text{भुब·भुक}}{\text{भुघ·भुम}}\right)$ याचा ठिकाणीं $\left(\frac{\text{भुअ}}{\text{भुछ}}\right)$ लिहून व (कोछ) याचा ठिकाणीं (१-भुछ) ही किंमत ठेवून,

$$\frac{\text{भुअ}}{\text{भुछ}} - १ = \frac{\text{कोछ·कोघ·कोम·भुअ}}{\text{भुछ}} + \text{कोअ·कोब·कोक}$$

या समीकरणांत (१७२) सारणी कोष्टका प्रमाणें $\left(\frac{\text{भुअ}}{\text{भुछ}}\right)$ याचा ठिकाणीं $\left(\frac{न^2}{र^2}\right)$ लिहून, व भाजक सोडवून, स्थलांतरानें आणि भागाकारानें खालीं लिहिल्या प्रमाणें

$$न^2(१-\text{कोछ·कोघ·कोम}) = र^2(१+\text{कोअ·कोब·कोक})$$

अथवा

$$\frac{न^2}{र^2} = \frac{१+\text{कोअ·कोब·कोक}}{१-\text{कोछ·कोघ·कोम}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (१८१)$$

या सारणी कोष्टकाचे छेद सोडवून स्थलांतरानें खालीं लिहि ल्या प्रमाणें होतें.

$न^2 - र^2 = न^2 \cdot$ को ७ · को घ · को म + $र^2 \cdot$ को अ · को ब · को क

आतां (१८) सारणी कोष्टकाप्रमाणें को घ को म = $\frac{1}{2}$ को (घ + म) + $\frac{1}{2}$ को (घ − म) आहे. या समीकरणास (को ७) यानें गुणून उजव्या बाजूंत याच (१८) सारणी कोष्टकाची योजना केल्यास, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

को ७ · को घ · को म = $\frac{1}{4}$ को (७ + घ + म) + $\frac{1}{4}$ को (−७ + घ + म)
+ $\frac{1}{4}$ को (७ − घ + म) + $\frac{1}{4}$ को (७ + घ − म)

अथवा.

को ७ · को घ · को म = $\frac{1}{4}$ को २ अ + $\frac{1}{4}$ को २ (अ − ७) + $\frac{1}{4}$ को २ (अ − घ) + $\frac{1}{4}$ को २ (अ − म)

आतां या समीकरणांतील व याच प्रमाणें येणारीजी (को अ · को ब · को क) याची किंमत तीवरील ($न^2 - र^2$) या समीकरणाच्या उजव्या बाजूंत ठेवून त्यास ($न^2 \cdot र^2$) यानें भाग; आणि दुसऱ्या बाजूंत त्यांच्या किमती ठेव. ह्मणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{1}{र^2} - \frac{1}{न^2} = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\text{को २ अ + को २(अ − ७) + को २(अ − घ) + को २(अ − म)}}{\text{भु अ · भु(अ − ७) · भु(अ − घ) · भु(अ − म)}} \\ + \dfrac{\text{को २ स + को २(स − अ) + को २(स − ब) + को २(स − क)}}{\text{−को स · को(स − अ) · को(स − ब) · को(स − क)}} \end{array}\right\} \quad \cdots (१८२)$$

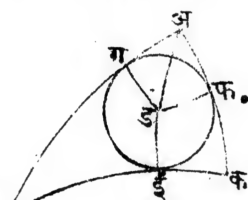
या सारणी कोष्टकांत अंशस्थलीं (२८) सारणी कोष्टकाप्रमाणें किंमत ठेवून पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\frac{1}{र^2}-\frac{1}{न^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{को^2अ-भु^2(अ-छ)+को^2(अ-घ)-भु^2(अ-म)}{भुअ\cdot भु(अ-छ)\cdot भु(अ-घ)\cdot भु(अ-म)}+\frac{को^2स-भु^2(स-अ)+को^2(स-ब)-भु^2(स-क)}{-कोस\cdot को(स-अ)\cdot को(स-ब)\cdot को(स-क)}\right\}\cdots(१८३)$$

यापासून उघड कळतें कीं, छेद एकानें वाढविले, किंवा कमी केले असतां, वरच्या सारणी कोष्टकांत अनेक फेरफार होतील.

१८० वरच्या सारणी कोष्टकांतील (४), (न) या सदृशांनी दिलीं असतां, भुज, कोस इत्यादिकांचा किमती निघतील; त्याकाढणें सुलभ आहेत; ह्मणून एथें त्यांचा विस्तार न करितां त्रिकोणांतर, व बाह्य, बाजूंस स्पर्शणाऱ्या वर्तुळाचा विचार लिहितो; तेणें करून कित्येक चमत्कारिक सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

१८१ या अबक, त्रिकोणातील वर्तुळाचा (ड) ध्रुव आणि इ, फ, ग हे स्पर्श बिंदु असून डअ, डई, डफ, डग, हे महद्वृत्ताचे कोंस असतील, तर ∠ई, ∠फ आणि ∠ग हे काटकोन होतील. आणि जापेक्षां डफ, डग चा बराबर आणि डअ, अडफ, व अडग या दोन त्रिकोणांस साधारण आहे; त्यापेक्षां अफ, अग या बाजू (११२) सारणी कोष्टका प्रमाणें बराबर होतील. तसेंच (११२) सारणी कोष्टका प्रमाणें डअफ, व डअग



हे दोन कोन ही, बराबर होतील. याच प्रमाणें, बई = बग आणि कई = कफ होतात; ह्मणून अफ + बई + ईक, ह्मणजे अफ + छ ही बेरीज तीन बाजूंचा बेरजेचा अर्धा बराबर आहे; याजकरितां अफ + छ = ञ ह्मणून अफ = ञ - छ आहे. आतां जर डफ = ज घेतला; तर अफड काटकोन त्रिकोणापासून (११२) सारणी कोष्टकाचा सहायानें, स्पडफ = भुअफ. स्पडअफ यांत (९०) सारणी कोष्टका प्रमाणें व (८६) कलमांत सांगितलेली, किंमत लिहून,

$$स्प ज = \sqrt{\frac{भु(ञ-छ)\cdot भु(ञ-घ)भु(ञ-म)}{भुञ}} = \frac{र}{भुञ} \cdots (१८४)$$

१०२ या सारणी कोष्टकांतील (र) यास, (१८१) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न होणारी जी (भुञ) ची किंमत, तिनें भागून, $\frac{र}{भुञ}$ किंवा, $स्प ज = \frac{र^2}{को\frac{1}{2}अ\cdot को\frac{1}{2}ब\cdot को\frac{1}{2}क\cdot भुछ\cdot भुघ\cdot भुम}$ यांत (१७५) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न होणारी जी ($र^2$) याची किंमत नीठेविली असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\left.\begin{aligned} स्प ज &= \frac{न}{२ को\frac{1}{2}अ\cdot को\frac{1}{2}ब\cdot को\frac{1}{2}क} \\ कोस्प ज &= \frac{२ को\frac{1}{2}अ\cdot को\frac{1}{2}ब\cdot को\frac{1}{2}क}{न} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (१८५)$$

१०२ जर (१०१) कलमांतील त्रिकोणाचा तीन बाजू, बाहेर वाढविल्यापासून, ज्याची एकेक बाजू पूर्वोक्त त्रिकोणाची आहे; अ-

ातीन त्रिकोण होतात; त्यांत तीनही बाजूंस स्पर्शणारीं तीन वर्तुळें केलीं; तर तीं पूर्वोक्त त्रिकोणाच्या तीनही बाजूंस बाहेरून स्पर्श करतील. आतां (छ) बाजूस बाहेरून स्पर्श करणारें जें वर्तुळ त्याचा ध्रुवापासून परिघापर्यंत कोंस करून, तो दाखवायास (उ') घेतला; व त्याच प्रमाणें (घ) आणि (म) यांस बाहेरून स्पर्शकरणारीं जीं वर्तुळें त्यांचा ध्रुवापासून परिघापर्यंत केलेले कोंस दाखविण्याकरितां (उ'') व (उ''') हे घेतले; तर (१८४) सारणीकोष्टकाप्रमाणें खालीं लिहिल्यारूपाचे सारणीकोष्टक उत्पन्न होतील.

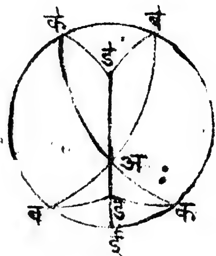
$$\text{पउ}' = \sqrt{\frac{\text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}{\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})}} = \frac{\text{र}}{\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})} \cdots (१८६)$$

$$\text{पउ}'' = \sqrt{\frac{\text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}{\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})}} = \frac{\text{र}}{\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})} \cdots (१८७)$$

$$\text{पउ}''' = \sqrt{\frac{\text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})}{\text{भु}(\text{अ}-\text{म})}} = \frac{\text{र}}{\text{भु}(\text{अ}-\text{म})} \cdots (१८८)$$

२०४ आतां (१८४), (१८६), (१८७) व (१८८) हे सारणीकोष्टक परस्पर गुणून खालीं लिहिल्या प्रमाणें समप्रमाण सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{पउ}\cdot\text{पउ}'\cdot\text{पउ}''\cdot\text{पउ}''' = \text{भुअ}\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{छ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{घ})\cdot\text{भु}(\text{अ}-\text{म}) = \text{र}^2 \cdots (१८९)$$



१०५ या आकृतींत अबक त्रिकोणाच्या तीनही कोनांस बाहेरून स्पर्शकरणारें वर्तुळ केलें; असें मानून त्याचा ध्रुवापासून पूर्वोक्त त्रिकोणाचा कोनांपर्यंत महद्वृत्ताचे कोंस करून (७) बाजूवर (ड ई) कोंस लंब कर.

आतां अडब व अडक आणि बडक हे त्रिकोण समद्विबाहू, याजकरितां (वरील १२ सि० प्र०) पायाकडील कोन बराबर आहेत; ह्मणून ∠ अबड + ∠ अकड = ∠ अ आणि ∠ डबक + ∠ डकब = ∠ ब + ∠ क − ∠ अ आहे; याजकरितां ∠ डबई = ½ (∠ ब + ∠ क − ∠ अ) = स − ∠ अ आहे. आतां (११४) सारणीकोष्टकाचा सहायानें (बईड) या काटकोन त्रिकोणांत कोडबई = स्पबई · कोस्पबड आहे. आतां या समीकरणाचा दोनही बाजू $\left(\frac{\text{स्पबड}}{\text{कोडबई}}\right)$ यानें गुण आणि (बड = र) घे; तर पांचव्या सारणीकोष्टकावरील टिपेचा सहायानें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

$$\text{स्पर} = \frac{\text{स्पबई}}{\text{कोडबई}} = \frac{\text{स्प}\tfrac{१}{२}\text{७}}{\text{को}(\text{स}-\text{अ})}$$

यापासून (११६) सारणीकोष्टकाप्रमाणें खालीं लिहिलेला, सारणीकोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्पर} = \sqrt{\frac{-\text{कोस}}{\text{को}(\text{स}-\text{अ})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{ब})\cdot\text{को}(\text{स}-\text{क})}} = \frac{-\text{कोस}}{\text{न}} \quad \ldots (११०)$$

१०६ या सारणी कोष्टकापासून तीन ही,कोनांचा योगानें (र) ची किंमत कळत्ये; ती बाजूंत काढण्या करितां (१६५) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न होणारी जी (-कोस) याची किंमत, ति लां (न) यानें भाग; ह्मणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल.

$$\frac{-कोस}{न} \text{ किंवा, } स्पर = \frac{भु^{१/२}ळ \cdot भु^{१/२}घ \cdot भु^{१/२}म \cdot भुअ \cdot भुब \cdot भुक}{न^{२}}$$

या समीकरणांत (१७६) सारणी कोष्टकापासून उत्पन्न होणारी जी (न) याची किंमत ती ठेविली असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पंन्न होतो.

$$\left.\begin{aligned} स्पर &= \frac{२भु^{१/२}ळ \cdot भु^{१/२}घ \cdot भु^{१/२}म}{र} \\ कोस्पर &= \frac{र}{२भु^{१/२}ळ \cdot भु^{१/२}घ \cdot भु^{१/२}म} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (१९१)$$

१०७ त्रिकोणाचा बाजू वाढविल्यानें जे (१०३) कलमांत सांगितल्या प्रमाणें तीन त्रिकोण होतात; त्यांचा बाहेरती नही,कोनांस स्पर्श करणारीं तीन वर्तुळें केलीं; असें मान. आतां पूर्वोक्त त्रिकोणाची (ळ) ही एक बाजू असून (र) ह्या केलेल्या वर्तुळाचा ध्रुवापासून परिघापर्यंत मह्द्वृत्ताचा कोंस (र) शीं संबंध ठेवणारा कल्पिला; व त्याच प्रमाणें (घ), (म) बाजू आणि वर सांगितल्या प्रमाणें (र) शीं संबंध ठेवणाऱ्या दुसऱ्या दोन वर्तुळांचा ध्रुवापासू-

न परिघा पर्यंत (र'') व (र''') हे कोंस मानिले; तर (१०३) कलमांती ल सारणी कोष्टकां प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$स्पर' = \sqrt{\frac{को(स-अ)}{-कोस\cdot को(स-ब)\cdot को(स-क)}} = \frac{को(स-अ)}{न} \cdots (१९२)$$

$$स्पर'' = \sqrt{\frac{को(स-ब)}{-कोस\cdot को(स-अ)\cdot को(स-क)}} = \frac{को(स-ब)}{न} \cdots (१९३)$$

$$स्पर''' = \sqrt{\frac{को(स-क)}{-कोस\cdot को(स-अ)\cdot को(स-ब)}} = \frac{को(स-क)}{न} \cdots (१९४)$$

१०८ आतां (१९०),(१९२),(१९३),(१९४) हे सारणी कोष्टक परस्पर गुणून, खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\left.\begin{array}{l} स्पर\cdot स्पर'\cdot स्पर''\cdot स्पर''' = \frac{1}{न^2} \\ कोस्पर\cdot कोस्पर'\cdot कोस्पर''\cdot कोस्पर''' = न^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (१९५)$$

१०९ सपूमेंटरी त्रिकोणाच्या बाजू (π-अ) व (π-ब) आणि (π-क) या आहेत. त्या त्रिकोणांतर, वर्तुळ संबंधी (१८४) सारणी कोष्टकांतील (ω), (ψ), (π) यांच्या ठिकाणीं ठेविल्या असतां, खालीं लिहिलेलीं, समीकरणें उत्पन्न होतात.

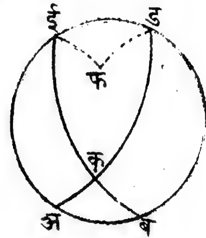
$$स्पJ = \sqrt{\frac{को(स-अ)\cdot को(स-ब)\cdot को(स-क)}{-कोस}}$$

$$कोस्पJ = \sqrt{\frac{-कोस}{को(स-अ)\cdot को(स-ब)\cdot को(स-क)}}$$

आतां, ही (को स्पJ) ची किंमत (१९०) सारणी कोष्टकांतील (स्पर) च्या किंमती बराबर आहे; ह्मणून (J) आणि (र) हे परस्परां-

चे कांप्लुमेंट आहेत. यावरून असें सिद्ध होतें कीं, कोणत्याही, गोलीय त्रिकोणांतरगत, वर्तुळाच्या ध्रुवापासून परिघापर्यंत केलाजो कोंस, तो ध्रुवक. किंवा सप्लुमेंटरी त्रिकोणाचा बाहेरील वर्तुळाचा ध्रुवापासून परिघापर्यंत जो कोंस त्याचा कांप्लुमेंट आहे. याजवरून या त्रिकोणाचा एक नवा संबंध दिसून येतो.

११० कोणत्याही, गोलीय त्रिकोणाचा क्षेत्रफळाची रीति उत्पन्न करण्या करितां या आकृतींतील (अबक) त्रिकोणाची (अब) बाजू पूर्ण वर्तुळ होईपर्यंत वाढीव; आणि (अक) व (बक) या त्याचा परिघास (ड) आणि (ई) स्थळीं छेदून पुढें जाऊन, द्वितीय वर्तुळार्धांत (फ) ठिकाणीं परस्परांस छेदित अशा कर. आतां महद्वृत्तें (वरील १ प्र० प्र०) परस्परांस दुभागितात; ह्मणून (बकई) आणि (कईफ) हीं अर्ध वर्तुळें आहेत; याजकरितां (बक) आणि (ईफ) बराबर, याच प्रमाणें (अक), (डफ) चा बराबर आहे; व (वरील ७ व्या० प्र०) आणि (भू० ७ सि० प्र०) (फ) कोन (क) कोना बराबर आहे; याजकरितां (अबक) आणि (डईफ) हे दोन त्रिकोण एकरूप आहेत. आतां ज्याची मर्यादा दोन महद्वृत्तांचीं अर्धें आहेत; असा जो



(ल्यून[*]) तो, तींच महद्दृत्तें मिळून जो कोन होतो; त्याशीं प्रमाणांत आहे; ह्मणून अर्ध गोलाचें पृष्ठ दाखविण्या करितां जर (ह) घेतला; तर खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$१८०° : अ :: ह : ल्यून, अबडक$$

यांतील आद्यंत व मध्य पदें गुणून, आणि गुणक सोडवून, $\frac{ह \cdot अ}{१८०°}$ = ल्यून, अबडक, आहे. याच रितीनें $\frac{ह \cdot ब}{१८०°}$ = ल्यून, बअईक, आणि $\frac{ह \cdot क}{१८०°}$ = ल्यून, कईफड, आहे;

आतां उघड दिसतें कीं, वर सांगितले जे तीन (ल्यून) त्यांची बेरीज (अईडब) अर्ध गोलाचें पृष्ठ अधिक (अबक) त्रिकोणाची दुपट या बराबर आहे; ह्मणून,

$$ह \cdot \frac{(अ+ब+क)}{१८०°} = ह+२(अबक\triangle)$$

यास स्थलांतर करून, व गुणक सोडवून,

$$अबक\triangle = \frac{१}{२} ह \cdot \frac{(अ+ब+क-१८०°)}{१८०°} \text{ आहे.}$$

आतां (शून्य लब्धि आणि मूल परिणति प्रमाणें) अथवा (शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्या भागांतील क्षेत्रफल, घनफलांत ४४ पृष्ठावर गोलाचें पृष्ठ फल करण्याची रीति सांगि

---

*. दोन कोंस परस्परांस दोन ठिकाणीं छेदितात; त्यांमधील जी अंतरपानठी, तिला (ल्यून) असें ह्मणतात. जसजसा छेदनस्थलींचा कोन मोठा होत जाईल; त्या प्रमाणानें (ल्यून) हीं, मोठा होत जातो.

नली आहे; तिज पासून) ककून येतें कीं, अर्ध गोलाचें पृष्ठ त्या गोलाचा महद्वृत्ताचा दुपटी बराबर किंवा (२ π ज²) याचा बराबर आहे. एथें (ज) ह्मणजे गोलाची त्रिज्या, आनां (अ ब क) त्रिकोणाचें क्षेत्रफल दाखवायास (त) घेंनला, तर खालीं लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$त = \pi ज^2 \frac{(अ+ब+क-१८०^\circ)}{१८०^\circ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१९६)$$

या सारणी कोष्टकाचीं पदें प्रमाणांत लिहून,

१८०° : अ+ब+क-१८०° : : π ज² : अबक △ क्षेत्रफल.

यावरून सिद्ध होतें कीं, गोलीय त्रिकोणाचें क्षेत्रफल त्याचा कोनांची बेरीज जितकी दोन काटकोनांहून अधिक असेंल; तित क्याशीं प्रमाणांत होईल. या दोन काटकोनांहून जितकी अधिक बेरीज, तिला (स्पेरिकल एक्सेस) ह्मणजे गोलीय वृद्धि असें ह्मणतात. आणखी असें आहे कीं, जेव्हा (स्पेरिकल एक्सेस) किंवा तीन कोनांची बेरीज माहीत आहे; तेव्हां तीज पासून क्षेत्रफल काढितां येईल. यावरून दिसून येतें कीं, जे त्रिकोण एकाच गोलावर असून ज्यांचा एकच (स्पेरिकल एक्सेस) आहे; ते सर्व जरीं निरनिराळे दिसण्यांत आले; तरीं क्षेत्रफलानें बराबर आहेत.

१११ कोणत्याही, गोलीय बहुकोनाकृतीचा क्षेत्रफलाचीरीति उत्पन्न करण्याकारितां त्या बहुकोनाकृतीचे कोन महद्वृत्ताचा कांसां

नीं सांध; ह्मणजे त्या आकृतीचा बाजू संख्येंत दोन उणें इतके त्रिकोण होतील.

आतां बाजू संख्या दाखवायास (४) आणि कोनांची बेरीज दाखवायास (स) घे. तर त्या त्रिकोणांचा (स्पेरिकल एक्सेस) बराबर (स-(४-२))·१८०° होईल. ह्मणून त्या बहुकोनाकृतीचें क्षेत्रफल दाखवायास (फ) घे. तर पुढें लिहिल्या प्रमाणें होईल.

१८०° : (स-(४-२))·१८०° : : १८०°×ज : फ . . . . (१९१)

११२. जर त्रिकोणाच्या तीन बाजू दिल्या असतील; तर त्याचे कोन (५४) व (५५) कलमां प्रमाणें काढितां येतील. आणि जर दोन बाजू व अंतरकोन दिला असेल; तर (१२९) व (१३०) सारणीकोष्टकां पासून अव्यक्त कोनांची अर्ध बेरीज व अर्ध वजाबाकी समजेल; तेणें करून तीनही कोन कळतील. या दोन जातींचीं उदाहरणें व्यवहारामध्यें फार येतात; ह्मणून कोन समजण्याचा पूर्वीच (स्पेरिकल एक्सेस) काढण्याची रीति सांगतों.

आतां ½(अ+ब+क) हें दाखवायास (स) आणि (स्पेरिकल एक्सेस) दाखवायास (इ) घे. तेव्हां ½ इ = स - ९०°, भुज ½ इ = -कोस, को ½ इ = भुस आणि स्पस = -कोस्प ½ इ आहे; ह्मणून स्प ½ (अ+ब+क) = -कोस्प ½ इ, होईल.

आतां या समीकरणाचा डाव्या बाजून (२९) सारणीकोष्टका

प्रमाणें $\frac{1}{2}$(अ+ब) हा एक कोंस व $\frac{1}{2}$ क हा दुसरा कोंस घेऊन, जें समीकरण येतें; त्याचा उजव्या बाजूंतील अंश आणि छेद (को $\frac{1}{2}$(छ+घ)) यानें गुणून, त्यांत स्प $\frac{1}{2}$(अ+ब) ची (१०८) सारणी कोष्टकांतील किंमत ठेवून, खालीं लिहिल्या प्रमाणें समीकरण होतें.

$$\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{इ} = \frac{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}-\text{घ})\cdot\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{क}+\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}+\text{घ})\cdot\text{स्प}\tfrac{1}{2}\text{क}}{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}+\text{घ})-\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}-\text{घ})}$$

आतां या समीकरणाच्या डाव्या बाजूचा उणा एक गुणक मोडवून, उजव्या बाजूंतील अंशांस (२भु $\frac{1}{2}$क · को $\frac{1}{2}$क) यानें व छेदांस त्याच गुणकाचा बराबरील (भुक) यानें गूण; आणि अंशांत (३१) व (३२) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेव; ह्मणजे खालीं लिहिलेलें समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{इ} = \frac{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}-\text{घ})+\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}+\text{घ})+\{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}-\text{घ})-\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}+\text{घ})\}\cdot\text{कोक}}{\{\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}-\text{घ})-\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{छ}+\text{घ})\}\cdot\text{भुक}}$$

या समीकरणाच्या उजव्या बाजूंतील अंशांस छेदांनीं भागून, अंशांत (१८) व छेदांत (१९) सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेव; ह्मणजे खालीं लिहिलेल्या रुपाचा सारणी कोष्टक होतो.

$$\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{इ} = \frac{\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{छ}\cdot\text{कोस्प}\tfrac{1}{2}\text{घ}+\text{कोक}}{\text{भुक}} \quad \cdots\cdots\cdots (११८)$$

११३ आतां (भु $\frac{1}{2}$ इ = − कोस) आहे; ह्मणून तीन बाजू दिल्या असतील; तर (११७) सारणी कोष्टका प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

$$भु \frac{१}{२} इ = \frac{\sqrt{भुअ \cdot भु(अ-छ) \cdot भु(अ-घ) \cdot भु(अ-म)}}{२को\frac{१}{२}छ \cdot को\frac{१}{२}घ \cdot को\frac{१}{२}म} \quad \ldots (१९९)$$

११४ आतां (१९८) सारणीकोष्टकांतील (कोक) आणि (भुक) रद्द करण्याकरितां अंशांतील पहिलें पद (२भु$\frac{१}{२}$छ · २भु$\frac{१}{२}$घ · को$\frac{१}{२}$छ · को$\frac{१}{२}$घ) यानें गूण, आणि याच गुणकाच्या बराबरील (भुछ · भुघ) यानें छेद, व अंशस्थलींचीं बाकी पदें गूण; ह्मणजे खालीं लिहिल्याप्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल.

$$कोस\frac{१}{२}इ = \frac{२को\frac{१}{२}छ \cdot २को\frac{१}{२}घ + भुछ \cdot भुघ \cdot कोक}{भुछ \cdot भुघ \cdot भुक}$$

आतां या समीकरणांतील अंशस्थलींचें प्रथम पद (३१) सारणीकोष्टकाप्रमाणें (१+कोछ) · (१+कोघ) याच्या बराबर आहे, व दुसरें पद (८७) सारणीकोष्टकांतील पदांस स्थलांतर करून (कोम−कोछ · कोघ) याच्या बराबर आहे; आणि छेद (९३) सारणीकोष्टकाप्रमाणें (२भ) याच्या बराबर आहे; ह्मणून याकिंमती वरच्या समीकरणांत ठेवून, पुढें लिहिल्याप्रमाणें सारणीकोष्टक उत्पन्न होतें.

$$कोस\frac{१}{२}इ = \frac{१+कोछ+कोघ+कोम}{२\sqrt{भुअ \cdot भु(अ-छ) \cdot भु(अ-घ) \cdot भु(अ-म)}} \quad \ldots (२००)$$

११५ आतां (१९९), (२००) या सारणीकोष्टकांच्या गुणाकारांतील अंशस्थलीं दोन, ऊणें दोन, मिळवून, त्यांत (३१) सारणीकोष्टकाप्रमा

णें किंमत ठेव; ह्मणजे खालीं लिहिलेला सारणी कोष्टक उत्पन्न होईल.

$$\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{इ} = \frac{\text{१+को ख+को घ+को म}}{\text{४को}\tfrac{1}{2}\text{ख}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}} = \frac{\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{ख}+\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{घ}+\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{म}-\text{१}}{\text{२को}\tfrac{1}{2}\text{ख}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}} \quad \text{..(२०१)}$$

११६ आतां (२०१) सारणी कोष्टकाचा दोनही, बाजू एकांतून वजा करून, बाकीस (१९९) सारणी कोष्टकानें भाग; आणि डाव्या बाजूंत (४९) सारणी कोष्टका प्रमाणें किंमत ठेव; ह्मणजे पुढील समीकरण उत्पन्न होतें.

$$\text{स्प}^2\tfrac{1}{2}\text{इ} = \frac{\text{१}-\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{ख}-\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{घ}-\text{को}^2\tfrac{1}{2}\text{म}+\text{२को}\tfrac{1}{2}\text{ख}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}}{\sqrt{\text{भुअ}\cdot\text{भु(अ}-\text{ख)}\cdot\text{भु(अ}-\text{घ)}\cdot\text{भु(अ}-\text{म)}}}$$

या समीकरणाचे अंश खालीं लिहिल्या गुण्य गुणकांचा गुणाकार आहे.

$$\text{को}\tfrac{1}{2}\text{ख}-\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}+\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{म}, \text{ आणि}$$

$$-\text{को}\tfrac{1}{2}\text{ख}+\text{को}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{को}\tfrac{1}{2}\text{म}+\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{घ}\cdot\text{भु}\tfrac{1}{2}\text{म};$$

अथवा, हेच गुण्य गुणक (१४) आणि (१५) सारणी कोष्टका प्रमाणें पुढें लिहिल्या रुपाचे होतील.

$$\text{को}\tfrac{1}{2}\text{ख}-\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{घ}+\text{म}), \text{ आणि}$$

$$-\text{को}\tfrac{1}{2}\text{ख}+\text{को}\tfrac{1}{2}(\text{घ}-\text{म});$$

हीं पदें (२२) सारणी कोष्टका प्रमाणें खालीं लिहिल्या रुपाचीं होतात

$$\text{२भु}\tfrac{1}{4}(\text{ख}+\text{घ}+\text{म})\cdot\text{भु}\tfrac{1}{4}(-\text{ख}+\text{घ}+\text{म}), \text{आणि}$$

$$\text{२भु}\tfrac{1}{4}(\text{ख}-\text{घ}+\text{म})\cdot\text{भु}\tfrac{1}{4}(\text{ख}+\text{घ}-\text{म})$$

अथवा

$$२\,\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{घ})\cdot\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{न}),\quad\text{आणि}$$

$$२\,\text{भु}\tfrac{१}{२}\text{अ}\cdot\text{भु}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ध});$$

यांचा गुणाकार अंशस्थलीं ठेवून, व (३०) सारणी कोष्टकाप्रमाणें छेदांस रूपांतर करून, आणि अंशांस छेदांनीं भागून पुढें लिहिल्या प्रमाणें सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$\text{स्प}\tfrac{१}{४}\text{इ}=\sqrt{\text{स्प}\tfrac{१}{२}\text{अ}\cdot\text{स्प}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ध})\cdot\text{स्प}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{घ})\cdot\text{स्प}\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{न})}\quad(२०२)$$

हा सुंदर सारणी कोष्टक तीन बाजू दिल्या असतां, (स्पेरिकल एक्सेस) काढण्याचा उपयोगी झाला.

११७ जर पाया आणि क्षेत्रफल, किंवा पाया आणि तीन कोनांची बेरीज, जांत दोन कोन बराबर आहेत; हीं दिलीं असतां, त्या त्रिकोणाचा शिरकोनाचें (लोकस*) पुढील रितींनीं काढितां येईल.

आतां (१०५) कलमांतील आकृती प्रमाणें (बकबके) या वर्तुळांत सांगितल्या (ध) पायाबराबर (बक) कौंस कर, आणि (बकब), (कबके) हे प्रत्येकीं अर्धवर्तुळा बराबर घे. त्याचप्रमाणें ∠बकेड, ∠कबेड हे प्रत्येकीं सांगितल्या कोनांचा अर्ध बेरजे बराबर कर; तर (ब) व (के) यांतून जाणारें जें लघुवर्तुळ, ज्याचा (ड) ध्रुव आहे; तेंच इच्छिलें (लोकस) होईल. आतां (अ) शिरोबिंदु परिघा

---

* हें लघुवर्तुळ किंवा कौंस असतो.

वर कोठेंही, असला; तरीं चिंता नाहीं; कारण (बबे), (ककै), (अडे) हे महद्वृत्तांचा कोंसानीं जे (अबेड) व (अकेड) कोन होतात; त्यांचा बेरजे बरोबर (बेअकै) किंवा (अ) कोन आहे; आणि (बबेक, व (ककैब हे प्रत्येकीं (ब) आणि (क) कोनां बरोबर आहेत; ह्मणून जेव्हां (अ) लघुवर्तुळाचा परिघावर आहे; तेव्हां (अ, ब, क) या तीन कोनांची बेरीज, (कबेब), (अबेड) व (बकैक) आणि (अकेड) या कोनांचा बेरजे बरोबर आहे; आणि हे शेवटील कोन कृत्यानें सांगितल्या कोनांचा बेरजे बरोबर आहेत.

टीप, याच रितीनें असें सिद्ध होतें कीं, जर (अबक) त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ व (बक) पाया हीं सांगितलीं असतां, (अबक) याचा बाहेर जें वर्तुळ होईल; तें त्याचा शिरकोनाचें (लोकस) होईल.

११८, (१०५) कलमावरून उघड आहे कीं, कोणत्याही गोलीय त्रिकोणाचा पाया व शिरकोन आणि दुसऱ्या दोन कोनांची बेरीज याची वजाबाकी, हीं सांगितलीं असतां, त्या त्रिकोणाचा बाहेर जें वर्तुळ होईल; त्याचा जो परिघ तोच त्या शिरोबिंदूचें (लोकस) होईल.

११९ जर काटकोन त्रिकोणाचे अवयव भुजज्या किंवा कोभुजज्या याचा सहायानें काढावयाचे असतील; आणि ती भुजज्या किंवा कोभुजज्या त्रिज्येंचा लांबीजवळ जवळ असेल; तर (४५) व (४६) कलमांतील रितीनें लाग्रतमिक कोष्टकापासून उत्तर बरोबर नि-

धतनाहीं; याजकरितां पुढें दुसरीरीति लिहितों.

आतां (११२), (११३), (११४) यासारणीकोष्टकांत (१९), (१८), (१७) यासारणीकोष्टकांप्रमाणें किंमत ठेवून, पुढील सारणीकोष्टक उत्पन्न होतात.

भुछ = ½ (को (अ ~ म) - को (अ + म)) . . . . . . (२०३)

कोम = ½ (को (छ ~ घ) + को (छ + घ)) . . . . . (२०४)

कोअ = ½ (भु (छ + ब) - भु (छ - ब)) . . . . . (२०५)

यासारणीकोष्टकांचा उजव्या बाजूंतील पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी घेऊन, स्वाभाविक भुजज्या आणि कोभुजज्या यांचा सहायानें इच्छाफलें उत्पन्न होतील; व यांपासून उत्पन्न होणारे जे लाग्रतमिक कोष्टक, त्यांचा योगानें उत्तर अगदीं जवळजवळ निघेल. याप्रमाणें दुसरीरीति प्रथम इच्छित नव्हे; असा भाग घेऊन नीच मागितल्या भागांतून एक भाग यांजपासून उत्पन्न होत्ये; ती जर्शी कीं, अग (पाय) सांगून कर्ण काढणें असेल; आणि तो कर्ण व ते (पाय) फारलहान असतील; तर (११३) सारणीकोष्टका प्रमाणें कोम = कोछ · कोघ यांची योजना करण्याबद्दल (११२) सारणीकोष्टकांत अक्षरांचा फेरफार करून भुघ = कोस्पअ · स्पछ याचा योगानें प्रथम ∠अ, काढ. नंतर (११४) सारणीकोष्टकाप्रमाणें कोअ = स्पघ · कोस्पम यापासून (म) याची किंमत फारच बराबर निघेल.

१२० कित्येक सारणीकोष्टकांस खालीं लिहिल्याप्रमाणें रूप दिलें असतां, त्यांपासून स्पर्शरेषेच्या योगानें फारच सुलभ आणि बरोबर अशीं उत्तरें येतील. आतां मनांत आणकीं, (अ) व (थ) हे अवयव सांगितले असून, (ब) काढणें आहे; तर (११४) सारणीकोष्टकाच्या सहायानें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

$$१ : भुब :: कोथ : कोअ$$

हें मिश्रणानें व भागाकारानें लिहून,

$$\frac{१-भुब}{१+भुब} = \frac{कोथ-कोअ}{कोथ+कोअ}$$

आतां भुब = को (९०° - ब) आहे; ह्मणून वरच्या समीकरणास - (३२) व (३१) आणि (२५) या सारणीकोष्टकांप्रमाणें रूप देऊन, व वर्गमूळ काढून,

$$स्प(४५° - \tfrac{१}{२}ब) = \pm\sqrt{स्प\tfrac{१}{२}(अ+थ) \cdot स्प\tfrac{१}{२}(अ-थ)} \quad \cdots (२०६)$$

या सारणीकोष्टकापासून लाग्रतमाच्या सहायानें उत्पन्न होणारा कोंस तो (धन) किंवा (ऋण) असेल; ह्मणून तो दाखवायास ± (क्ष) घेतला तर, ब = (९०° ± २क्ष) होईल. या रितीनें (ब) ची किंमत फार जवळ जवळ निघत्ये.

१२१ याच प्रमाणें (११२) सारणीकोष्टकापासून १ : भुअ :: भुम : भुथ हें प्रमाण होईल; यांस जर वरच्या कलमांत सांगितल्याप्रमाणें संस्का

रकेले; तर खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$स्प(४५° - \frac{१}{२}म) = \pm\sqrt{\frac{स्प\frac{१}{२}(अ - थ)}{स्प\frac{१}{२}(अ + थ)}} \cdots\cdots (२०७)$$

$$स्प(४५° - \frac{१}{२}अ) = \pm\sqrt{\frac{स्प\frac{१}{२}(म - थ)}{स्प\frac{१}{२}(म + थ)}} \cdots\cdots (२०८)$$

१२२ याच प्रमाणें (११३) सारणी कोष्टकापासून — १ : कोथ : : कोघ : कोम, असें प्रमाण होतें; यासही (१२०) कलमांत सांगितलेले संस्कार देऊन, पुढें लिहिला सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$स्प\frac{१}{२}थ = \sqrt{स्प\frac{१}{२}(म + घ) \cdot स्प\frac{१}{२}(म - घ)} \cdots\cdots (२०९)$$

१२३ आतां खालीं लिहिलेलीं समीकरणें (११२), (११३), (११४) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें आहेत.

$$भुथ = स्पघ \cdot कोस्पब$$

$$कोम = कोस्पअ \cdot कोस्पब$$

$$कोअ = स्पघ \cdot कोस्पम$$

यांतील पहिल्या समीकरणाच्या दोनही बाजू एकांतून वजा करून, व मिळवून, याबाकीस बेरजेनें भाग; ह्मणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें होतें.

$$\frac{१ - भुथ}{१ + भुथ} = \frac{१ - स्पघ \cdot कोस्पब}{१ + स्पघ \cdot कोस्पब}$$

यासमीकरणाच्या डाव्या बाजूंत (१२०) कलमांत सांगितल्याप्र

माणें संस्कार दे; आणि उजव्या बाजूंतील अंश व छेद यांस -
को घ · को ब यानें गुणून, अंश स्थलीं (१३) व छेद स्थलीं (१२)
सारणी कोष्टकां प्रमाणें किंमत ठेव; आणि वर्गमूळ काढ; ह्मणजे
पुढील सारणी कोष्टक उत्पन्न होतो.

$$स्प(४५° - \frac{१}{२}ड) = \pm\sqrt{\frac{भु(ब-घ)}{भु(ब+घ)}} \qquad (२१०)$$

याच रितीनें दुसऱ्यां दोन राहिलेल्या समीकरणांपासून खालीं लिहिलेले सारणी कोष्टक उत्पन्न होतात.

$$स\frac{१}{२}म = \sqrt{\frac{-को(अ+ब)}{को(अ-ब)}} \qquad (२११)$$

$$स\frac{१}{२}अ = \sqrt{\frac{भु(म-घ)}{भु(म+घ)}} \qquad (२१२)$$

जर गोलीय त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी वाटत वाटत जात असून, त्रिज्या हीं, वृद्धिंगत होत असेल; तर तो त्रिकोण हळू हळू सरळ रेघ त्रिकोणाच्या रूपाचा होईल. आणि जर त्रिज्या अनंत असेल; तर सरळ रेघ त्रिकोणच होईल; अशा त्रिकोणांत बाजूवतिची भुजज्या आणि स्पर्श रेषा या एकत्र मिळून, एकच सरळ रेघ होईल. आणि कोभुजज्या, त्रिज्येबरोबर ह्मणजे अनंत व कोस्पर्शरेषा ही, अनंत होईल. याजवरून असें सिद्ध होतें कीं, जा गोलीय त्रिकोण संबंधी सारणी कोष्टकांत बाजूंचा भुजज्या अथ

या स्पर्श रेषा किंवा बाजूंची बेरीज, अर्ध बेरीज इत्यादिकांचा भुजज्या अथवा स्पर्श रेषा आहेत; ते सारणी कोष्टक सरळ रेघ त्रिकोण संबंधी ही, होतील.

आतां वर सांगितल्या प्रमाणें बाजूंचा भुजज्या व स्पर्श रेषा यांज बराबर बाजूच आहेत. म्हणून भुजज्या व स्पर्श रेषा यांचा ठिकाणीं बाजू लिहून (९४) सारणी कोष्टकाचें रूप शिक्षामाला पुस्तकाचा दुसऱ्याभागांतील सरळ रेघ त्रिकोणमितीचा (१ सि० प्र०) होईल. आणि (८८), (८९), (९०), (९३) हे सारणी कोष्टक, (७९), (८०), (८१), (८४) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें होतील. तसेंच (२४) व (६७) सारणी कोष्टकां प्रमाणें स्प ½ (अ+ब) = कोस्प ½ क यांत थोडा फेरफार केल्यानें (७५) सारणी कोष्टका प्रमाणें होतें. याच रितीनें (९१) व (९२) हे, (८२) आणि (८३) सारणी कोष्टकां सारिखे, आणि (११०) व (१११) हे, (७६) व (७७) या सारणी कोष्टकां प्रमाणें होतात. तसेंच (११७), (१२१), (१४९) (१५२), (१५३), (१५४), (१५५), (१५६), (१५७), (१५८), (१५९), (१६०), (१६१), (१६२), (१६४) आण खी ही, कित्येक सारणी कोष्टकांचे परिणाम सरळ रेघ त्रिकोणावर लागू आहेत. आणि (२०२) च्या सारणी कोष्टकास किंचित् रुपांतर केल्यानें तीन बाजू सांगितल्या असतां, क्षेत्र

फलकरण्याचा $\sqrt{अ\cdot(अ-छ)\cdot(अ-घ)\cdot(अ-म)}$ हा कोष्टक उत्पन्न होतो.

१२४ आतां (११२), (११४) या सारणी कोष्टकांतील (कोछ=र) ह्मणजे त्रिज्या घेऊन, आणि प्रथमास कोस्पम, यानें गुणिल्यानें (११२), (११४) हे सारणी कोष्टक सरळरेघ त्रिकोणावर लाविता येतात. याच प्रमाणें (११३) सारणी कोष्टकांतील प्रथम व दुसऱ्या उद्देशकांपासून, स्पअ = कोस्पब हें उत्पन्न होतें. व याच रितीनें प्रथम आणि तिसऱ्या उद्देशकांचे वर्ग करून (६) सारणी कोष्टकाचा सहायानें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

$$१-भुं^{2}म = १-भुं^{2}छ-भुं^{2}घ+भुं^{2}छ\cdot भुं^{2}घ$$

यांतून एक वजा करून चिन्हें बदल कर; व दुसऱ्या बाजूतील शेवटील पद ($ज^{2}$) यानें भाग, ह्मणजे त्रिज्या अनंत आहे ह्मणून शेवटील पद जाऊन (भू० ३४ सि० प्र०) $म^{2}=छ^{2}+घ^{2}$ असें सिद्ध होतें.

१२५ वर सांगितला जो फेरफार, त्याच रितीनें (८५) सारणी कोष्टक खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$\sqrt{(१-भुं^{2}छ)} = कोअ\cdot भुघ\cdot भुम+\sqrt{(१-भुं^{2}घ-भुं^{2}म+भुं^{2}घ\cdot भुं^{2}म)}$$

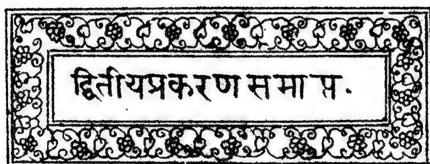
याचा डाव्या बाजूचें वर्गमूळ श्रेढींत काढिलें असतां- $(१-\frac{1}{2}भुं^{2}छ-\frac{1}{8}भुं^{4}छ-इ०)$ होईल. तसेंच दुसऱ्या बाजूंतील

दुसऱ्या पदांचें वर्गमूळ काढिलें असतां, खालीं लिहिल्या प्रमाणें होईल.

$$\text{कोअ}\cdot\text{भुघ}\cdot\text{भुम} + १ - \frac{१}{२}\text{भु}^{२}\text{घ} - \frac{१}{२}\text{भु}^{२}\text{म} + \frac{१}{४}\text{भु}^{२}\text{घ}\cdot\text{भु}^{२}\text{म} - \frac{१}{२४}\text{भु}^{४}\text{घ} - \text{इ०}$$

यांतून एक वजा करून, चतुर्घाता पासून पुढील पदें ($ज^{२}$) यानें भाग, आणि दुपट करून, व वरचा कलमांत सांगितल्या प्रमाणें संस्कार दे, ह्मणजे खालीं लिहिल्या प्रमाणें (७८) सारणी कोष्टका मारिखें समीकरण उत्पन्न होतें.

$$ज^{२} = घ^{२} + म^{२} - २\,घ\,म\cdot\text{कोअ}$$



सूर्याची क्रांति, रेखांश ७५ पूर्वेस, दिवसाचे १२ वाजतां.

तारखा	जानेवारी दक्षिण	फेब्रुआरी द.	मार्च द.	एप्रिल उत्तर	मे उ.	जून उ.
१	२३° ४	१७° १६	७° ४१	४° १८	१४° ५३	२१° ५८
२	२२ ५९	१६ ५९	७ २६	४ ४१	१५ ११	२२ ६
३	२२ ५४	१६ ४२	७ ४	५ ४	१५ २९	२२ १४
४	२२ ४८	१६ २५	६ ४१	५ २७	१५ ४६	२२ २१
५	२२ ४१	१६ ७	६ १७	५ ५०	१६ ४	२२ २९
६	२२ ३४	१५ ४८	५४	६ १२	१६ २१	२२ ३६
७	२२ २८	१५ ३०	५ ३१	६ ३५	१६ ३८	२२ ४२
८	२२ २०	१५ ११	५ ८	६ ५७	१६ ५४	२२ ४८
९	२२ १२	१४ ५२	४ ४४	७ २०	१७ ११	२२ ५३
१०	२२ ४	१४ ३३	४ २१	७ ४२	१७ २७	२२ ५८
११	२१ ५५	१४ १३	३ ५७	८ ४	१७ ४३	२३ ३
१२	२१ ४५	१३ ५३	३ ३४	८ २६	१७ ५८	२३ ७
१३	२१ ३५	१३ ३३	३ १०	८ ४८	१८ १३	२३ ११
१४	२१ २५	१३ १३	२ ४७	९ १०	१८ २८	२३ १४
१५	२१ १४	१२ ५३	२ २३	९ ३२	१८ ४३	२३ १७
१६	२१ ३	१२ ३२	१ ५९	९ ५४	१८ ५७	२३ २१
१७	२० ५२	१२ १९	१ ३६	१० १५	१९ ११	२३ २३
१८	२० ४०	११ ५०	१ १२	१० ३६	१९ २४	२३ २५
१९	२० २८	११ २९	० ४८	१० ५७	१९ ३७	२३ २६
२०	२० १६	११ ८	द० २५	११ १८	१९ ५०	२३ २७
२१	२० ३	१० ४६	उ० १	११ ३८	२० ३	२३ २८
२२	१९ ४९	१० २४	० २३	११ ५९	२० १५	२३ २८
२३	१९ ३६	१० ३	० ४६	१२ १९	२० २७	२३ २७
२४	१९ २१	९ ४१	१ १०	१२ ३९	२० ३९	२३ २७
२५	१९ ७	९ १८	१ ३४	१२ ५९	२० ५०	२३ [illegible]
२६	१८ ५२	८ ५७	१ ५७	१३ १८	२१ १	२३ २४
२७	१८ ३७	८ ३५	२ २१	१३ ३८	२१ १२	२३ २३
२८	१८ २१	८ १२	२ ४४	१३ ५७	२१ २२	२३ २१
२९	१८ ५		३ ८	१४ १६	२१ ३१	२३ १८
३०	१७ ४९		३ ३१	१४ ३४	२१ ४१	२३ १५
३१	१७ ३३		३ ५४		२१ ५०	

या कोष्टकांत महिन्याखालीं आणि तारखेसमोर क्रांति लिहिली आहे,

सूर्याची क्रांति, रेखांश ७५ पूर्वेस, दिवसाचे १२ वाजतां -

तारखा	जुलई उ०	आगस्त उ०	सप्तेंबर उ०	अकटोंबर दक्षिण	नोवेंबर द.	डिसेंबर द.
१	२३ ११	१८ १३	८ ३३	३ ५५	१४ १४	२१ ४४
२	२३ ७	१७ ५८	८ ११	३ १९	१४ ३४	२१ ५३
३	२३ २	१७ ४२	७ ४९	३ ४२	१४ ५३	२२ २
४	२२ ५८	१७ २८	७ २७	४ ५	१५ ११	२२ १०
५	२२ ५२	१७ १२	७ ५	४ २९	१५ ३०	२२ १९
६	२२ ४७	१६ ५५	६ ४३	४ ५२	१५ ४८	२२ २७
७	२२ ४१	१६ ३९	६ २१	५ १५	१६ ६	२२ ३४
८	२२ ३५	१६ २२	५ ५८	५ ३८	१६ २५	२२ ४१
९	२२ २९	१६ ५	५ ३५	६ १	१६ ४२	२२ ४७
१०	२२ २१	१५ ४८	५ १३	६ २३	१६ ५९	२२ ५३
११	२२ १४	१५ ३०	४ ५०	६ ४६	१७ १६	२२ ५८
१२	२२ ६	१५ १२	४ २७	७ ९	१७ ३३	२३ ३
१३	२१ ५७	१४ ५४	४ ४	७ ३२	१७ ४९	२३ ८
१४	२१ ४९	१४ ३६	३ ४१	७ ५४	१८ ५	२३ १२
१५	२१ ४०	१४ १८	३ १८	८ १६	१८ २१	२३ १५
१६	२१ ३०	१३ ५९	२ ५५	८ ४०	१८ ३६	२३ १९
१७	२१ २०	१३ ४०	२ ३२	९ २	१८ ५१	२३ २२
१८	२१ १०	१३ २१	२ ९	९ २४	१९ ६	२३ २४
१९	२१ ०	१३ १	१ ४५	९ ४६	१९ २०	२३ २६
२०	२० ५०	१२ ४२	१ २२	१० ७	१९ ३४	२३ २७
२१	२० ३९	१२ २२	० ५९	१० २९	१९ ४८	२३ २८
२२	२० २७	१२ २	० ३५	१० ५०	२० १	२३ २८
२३	२० १५	११ ४२	उ० २	११ १२	२० १५	२३ २७
२४	२० ३	११ २१	द० १२	११ ३३	२० २७	२३ २७
२५	१९ ५०	११ १	० ३५	११ ५४	२० ३९	२३ २६
२६	१९ ३७	१० ४०	० ५९	१२ १४	२० ५१	२३ २४
२७	१९ २४	१० २०	१ २२	१२ ३५	२१ २	२३ २३
२८	१९ १०	९ ५९	१ ४५	१२ ५५	२१ १३	२३ २०
२९	१८ ५६	९ ३८	२ ९	१३ १५	२१ २४	२३ १७
३०	१८ ४२	९ १६	२ ३२	१३ ३५	२१ ३४	२३ १४
३१	१८ २८	८ ५५		१३ ५५		२३ १०

ही ७५ रेखांशांवरील दिवसाच्या बारा वाजतांची आहे· तिजवरून इच्छित काल

आणि स्थलांच्या क्रांति स्वल्पांत कळेल. जर मार्च तारीख पंधरा प्रातःकालच्या सहा वाजतांची क्रांति समजावी, अशी इच्छा असेल, तर त्या तारखेसमोर आणि महिन्याखालीं बारा वाजतांची क्रांति २° २९' आहे; परंतु प्रातःकालच्या सहा वाजतांच्या क्रांतिची इच्छा आहे; ह्मणून इच्छित तारखेच्या पूर्वील तारखेसमोर, बारा वाजतांची क्रांति २° ४७' आहे, याजवरून २४ तासांस जर २४' कमी, तर ६ तासांस किती? या प्रमाणें त्रैराशिकानें सहा कला येतात; याजकरितां इच्छित कालीं क्रांति २° २९' आहे. आतां याच दिवशीं सायंकालच्या सहा वाजतांच्या क्रांतिची इच्छा असेल, तर पंधरा व सोळा, या दोन तारखांच्या क्रांतिचें अंतर २४' आहे, ह्मणून वर सांगितल्या रितीनें त्रैराशिक केल्यास सहा कला येतात; यास्तव सायंकालीं सहा वाजतां क्रांति २° १७' आहे. याच प्रमाणें जर वर लिहिल्या पंधराव्या तारखेस दिवसाच्या बारा वाजतां ७२ रेखांशांवरील क्रांतिची इच्छा असेल, तर पंधरा व सोळा, या दोन तारखांच्या बारा वाजताच्या क्रांतिचें अंतर २४' आहे, ह्मणून ३६०° जर २४' तर ७२° किती? या प्रमाणें त्रैराशिकानें १२" येतात; याजकरितां ७२ रेखांशांवर २° २२' ४८" क्रांति आहे. व त्याच तारखेस ७८ रेखांशांवरील दिवसाच्या बारा वाजतांची क्रांति, १४ व १५ तारखांचें अंतर घेऊन, वर लिहिल्या रितीनें २° २३' १२" आहे. या प्रमाणें इच्छित कालचीही, इष्ट स्थलावरील क्रांति निघेल. आतां क्रांति काढण्या विषयीं वरजी रीति लिहिली, ती केवळ बरोबर नाहीं; परंतु थोड्या अंतरावरील क्रांति काढणें आहे, ह्मणून विशेष चूक पडत नाहीं.

पुढील कोष्टकांत वर लिहिल्या रितीचा उपयोग व्हावा, ह्मणून कित्येक प्रसिद्ध गांवांच्या नावांखालीं, त्या त्या गांवाचे रेखांश, व सर्व गांवांसमोर अक्षांश लिहिले आहेत. त्यांतील कला ५' म्हणजे पांच ५॥ साडेपांच, अशा रीतीनें लिहिल्या आहेत.

कित्येक स्थलांचा अक्षांशांचा कोष्टक.

कलकत्ता	२२	२२	अहंमदनगर	१९	६	कऱ्हाड	१७	१७।।
काशी	२५	३०	आमगांव	१९	४।।	वांई	१७	५५।
शिंधहैदराबाद	२५	२२	टोंकें	१९	४।।	पंढरपूर	१७	४०।।
मद्रास	१३	४।।।	बेलें	१९	२।।	शिरोळ	१८	६
मुंबई	१८	५५।।	करमाळें	१८	२४	इस्लांपूर	१७	३
उज्जनी	२३	९	नासिक	२०	५७।।	वाळवें	१७	१।।।
इंदूर	२२	४२	त्र्यंबकेश्वर	१९	५३	कोल्हापूर	१६	४१।।।
ग्वाल्हेर	२६	१५	संगमनेर	१९	३९	मलकापूर	१६	५५।
धार	२२	३६।।	पुणें	१८	३०	निपाणी	१६	२३।।।
असीरगड	२१	२५।।।	तळेगांव	१८	४१	पन्हाळा	१६	४८।।
एलिचपूर	२१	१६।।	सासवड	१८	१८।।।	कागल	१६	३४।
नागपूर	२१	१०	भीमाशंकर	१९	८	मिरज	१६	४९
हैदराबाद	१७	२२	जुन्नर	१९	१६	सांगली	१६	५१।।।
अवरंगाबाद	१९	५५।	चिंचवड	१८	३७	तासगांव	१७	२।
दौलताबाद	१९	५७।।	पाटस	१८	२५।।	चिंचणी	१७	३।
पैठण	१९	३१।	इंदापूर	१८	७	कुरुंदवाड	१६	४१।
अकलकोट	१७	३३	जेजुरी	१८	१३।।।	इचलकरंजी	१६	३८।।।
बेदर	१७	५५।।	टेंभुर्णी	१८	१।।	जमखिंडी	१६	३०।।
कलबुर्गी	१७	२०।	सोलापूर	१७	४२	किटूर	१५	३५।।
धुळें	२०	५२	ब्रह्मपुरी	१७	३३।।।	धारवाड	१५	२६।।
मालेगांव	२०	३३।।।	मोहोळ	१७	४८।।।	जुनी हुबळी	१५	१९।।
बऱ्हाणपूर	२१	१७	मंगळवेढें	१७	३०।।।	नरगुंद	१५	४३
नंदुरबार	२१	२३।	सातारा	१७	४१।।।	बदामी	१५	५५
तालनेर	२१	१३।।।	विजापूर	१६	४९।।	कलादगी	१६	१३
कण्हेर	२०	१४।	भोर	१८	७	बागलकोट	१६	११।।।

कित्येक स्थलांचा अक्षांशांचा कोष्टक -

मदुर्ग	१५ ५६।।।	रत्नागिरी ७३ २१।	१७ ०	सोमेश्वर ७३ २५	१६ ५८।
वलगुंद	१५ ३३	[illegible]कोट ७३,७	१७ ५६	पांवस ७३ २३	१६ ५२।।।
ळ गांव ७४,३४।।।	१५ ५[illegible]	आंजर्ले [illegible]	१७ ५०।।।	पूर्णगड ७३ २२।	१६ ४८।
ाहापूर	१५ ४१।।	हरणै ७३ [illegible]	१७ ४८।।।	कळबुशी	१७ १८।
धोळ	१६. २०	मुरूड ७३ [illegible]	१७ ४६।।।	मागूजन	१७ १५।।।
काक	१६ १०।	कापूजोगनदे ७३,१५।	१७ ४५।।	बुंबोंड	१७ १७।।।
द शाहापुर	१६ ५।।	जालगांव ७३ १५।।	१७ ४४।।	संगमेश्वर ७३ ३६।।	१७ ११
मदाबाद ७२,३८	२२ १	करजगांव ७३ १३।	१७ ४२	देवरूख	१७ ३।।
डें ७२ ४८	२२ ४७	खिरवलगांव ७३ १४।।	१७ ३१।।	देवके	१६ ५९
ोरें ७३ २२	२२ २१	कोळथरे ७३,१२।	१७ ३८।।	शिपोशी ७३ ४१	१६ ५६
डोच ७२ ६	२१ ४१	पंचनदी ७३,११।।	१७ ३७।।	लांजें	१६ ५१।।।
रत ७२,२	२१ १२	दाभोळ ७३ १६।।	१७ ३४।	कोतवडें ७३,२३।।	१७ ५।।
णें ७२,६	१९ १०	पालगड ७३ २५	१७ ४८।।।	आडिवरे	१६ ४४।।
ान ७२ ५२।।	२० २४	खेड ७३ २७।।	१७ ४३	विजयदुर्ग	१६ ३३।
रापूर	१९ ५२	कसेरी ७३ २७	१७ ४२।।।	वाघोटणें ७३ ३०	१६ २१।।
ई ७२,५	१९ २०	मेटें ७३,३०	१७ ३६।।।	राजापूर ७३,३४	१६ ३९।
याण ७३,१०	१९ १५	अंजनवेल ७३,१४।	१७ ३३।।।	पेंभुर्ले ७३ ३७	१६ ३०
वेल ७३ १०	१८ ५९	गुहागर ७३,१६	१७ २८।	खारेपाटण	१६ [illegible]२।।
ण ७३,७	१८ ४३	पालशेत ७३ १५।।।	१७ २६।।	साळशी	१६ २०
ाड ७३,२७।	१८ २।।।	साबर्डे	१७ २४।।।	आचरें ७३ ३१	१६ १२।
ोटणें	१८ ३१	चिपळोण ७३ ३५	१७ ३।।।	अशामठ ७३,४५।।	१६ १९।
शाळा कुलाबा	१८ ५४	पर्शराम	१७ ३२।।।	मालवण ७३ ३३।।	१६ [illegible]१
ि बाग ७२,५५	१८ ३८	भालगुंड ७३ ११।।	१७ ९।।।	वेंगुर्ले ७३,४१।।	१५ ५१।।।
तरा ७३,२	१८ १५।।	नेवरें	१७ ७	सावंतवाडी ७३,५३	१५ ५४।
रधंन [illegible]	१८ २	गोळप	१६ ५४।।	गोवें ७३ [illegible]	१५ ३०

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	पंक्ती	अशुद्ध	शुद्ध
३	२	साह्याशिवाय	सहायाशिवाय
६	१	न्यूनता असतां ही,	न्यूनता आहे, तरीं ही
१०	५	दोनचिन्ह,	द्वि चिन्ह,
१५	१०	किंमती	किमती
—	१५	——	——
४१	९	माहित	माहीत
९७	१३	सांगितल्याचा	सांगितल्याचा
१४१	१७	त्रिकोणांतर,	त्रिकोणांतरगत
१५४	१९	असतो.	असतें.

छापतांना कांहीं प्रतींवर अशुद्धें उठलेलीं पहाण्यांत आलीं तीं

पृष्ठ	पंक्ती	अशुद्ध	शुद्ध
३२	१७	को २६° = $\frac{१}{४}$	को २६° - $\frac{१}{४}$
८१	१९	कांरण	कारण
—	१२	पृथ:क्करण	पृथक्करण
१४१	१८	डगचो	डगचा